Module : Gestion financière

Chapitre : Les emprunts indivis

1- Définition :

L'emprunt indivise se caractérise par le fait que l'emprunteur (un particulier ou une entreprise) s'adresse à un seul créancier (le nominal C de la dette n'est pas divisé). L'emprunt indivis s'oppose donc à l'emprunt obligataire pour lequel l'emprunteur (une grande entreprise ou l'Etat) recourt à une multitude de créanciers (le nominal C de la dette est divisé en titres).

2- Notion d'amortissement des emprunts indivis :

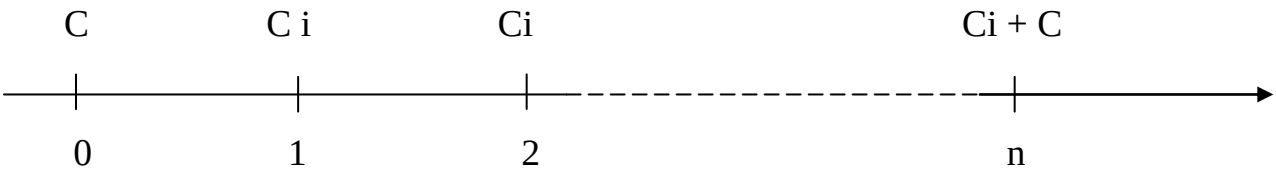
Une personne emprunte une somme C pour une durée égale à n périodes au taux i.

Pour l'amortissement de la dette on distingue deux types de système :

* emprunts remboursable en une seule fois
* amortissement à l'aide d'annuités.

2-1- Emprunts remboursables en une seule fois :

Ici l'emprunteur ne verse à la fin de chaque année que l'intérêt Ci de la dette. Le nominal C ou encore le « principal » est versé en bloc à la fin de la dernière année avec bien entendu, l'intérêt Ci. La situation se présente comme suit :



Remarque :

1) On vérifie aisément l'équivalence à l'époque 0 et à l'époque n, En effet :
   * à l'époque 0 on a :

$$C = Ci \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} + C(1+i)^{-n}$$

* de même à l'époque n 0 on a :

$$C(1+i)^n = Ci\ \frac{(1+i)^n - 1}{i} + C$$

2) Les versements effectués à la fin de chaque année de l'emprunt peuvent être considérés comme étant des annuités de remboursement. Notons, cependant que seule la dernière annuité contient l'amortissement de la dette (effectué en bloc). L'amortissement par annuités désigne donc tout autre chose.

Exemple :

Un emprunt de 250 000 dh est remboursable à la fin de la 10ème année.

L'emprunteur s'engage à verser à la fin de chaque année l'intérêt de la dette.

Taux : 10,5 % l'an. Vérifier que juste après le 4ème versement la dette est toujours de 250 000 dh.

On a :

C = 250 000 dh

i = 0,105

n = 10

I = Ci = 250 000 x 0,105 = 26 250 dh.

Le solde S_4 apparaît comme étant la différence entre le capital initial (débit pour l'emprunteur) et les différents versements effectués jusqu'à l'époque 4 (crédit pour l'emprunteur) :

$$S_4 = 250\,000 \times 1{,}105^4 - 26\,250\ \frac{1{,}105^4 - 1}{0{,}105} = 250\,000 \text{ dh}$$

2-2- Amortissement à l'aide d'annuités :

Ce système se caractérise par le fait que les annuités contient toutes un amortissement et donc dépasse l'intérêt de la période.

* à la fin de la première année, l'annuité a_1 est versée : celle-ci contient non seulement l'intérêt Ci de la 1ère année mais également une somme M_1 destinée à commencer à rembourser la dette ; c'est le 1er amortissement :

$$a_1 = Ci + M_1$$

La dette n'est plus C mais $C - M_1$

$$C_1 = C - M_1$$

* à la fin de la deuxième année on a :

$$a_2 = C_1 i + M_2$$

Le capital à la fin de cette deuxième année n'est plus C_1 mais $C_2 = C_1 - M_2$ et ainsi de suite …

* à la fin de la dernière année on a :

$$a_n = C_{n-1}\, i + M_n$$

et

$$C_n = C_{n-1}\, i - M_n$$

Remarque :

1) le capital initial C est égale à la somme des amortissements :

$$C = M_1 + M_2 + \ldots M_n = \sum_{k=1}^{n} M_k$$

2) A la fin de la $n^{ème}$ année le solde est nul :

$$C_n = C_{n-1} - M_n = 0$$

Ou encore $M_n = C_{n-1}$

Le capital restant dû au début de la dernière année est égale au dernier amortissement.

3) Le système qui est présenté ici peut faire l'objet d'un tableau appelé tableau d'amortissement :

Période	**Capital en début de période (CDP)**	**Intérêt de la période (I)**	**Amortissement (M)**	**Annuité (a)**	**Capital en fin de période (CEP)**
1	C	Ci	M_1	$a_1 = Ci + M_1$	$C_1 = C - M_1$
2	C_1	$C_1 i$	M_2	$a_2 = C_1 i + M_2$	$C_2 = C - M_2$
…	…	…	…	…	…
n	C_{n-1}	$C_{n-1} i$	M_n	$a_n = C_{n-1} i + M_n$	$C_n = 0$

Exemple :

Un emprunt de 200 000 dh est remboursable à l'aide de 6 annuités, la première venant à échéance un an après la date du contrat. Taux : 11 %.

Sachant que les amortissements sont respectivement 35 000 dh, 20 000 dh, 50 000 dh, 40 000 dh et 10 000 dh établir le tableau d'amortissement de l'emprunt considéré.

Le tableau d'amortissement se présente comme suit :

Période	**CDP**	**I**	**M**	**a**	**CFP**
1	200 000	22 000	35 000	57 000	165 000
2	165 000	18 150	20 000	38 150	145 000
3	145 000	15 950	50 000	65 950	95 000
4	95 000	10 450	40 000	50 450	55 000
5	55 000	6 050	10 000	16 050	45 000
6	45 000	4 950	45 000	49 950	0

L'intérêt la 1ère année, par exemple, se calcule comme suit :

$$I_1 = 200\,000 \times 0{,}11 = 22\,000 \text{ dh}$$

En additionnant l'intérêt et le premier amortissement, on obtient l'annuité a_1

$$a_1 = 22\,000 + 35\,000 = 57\,000 \text{ dh}$$

En retranchant l'amortissement du capital au début d'une période on obtient le capital dû au début de la période suivante, par exemple :

$$C_1 = 200\,000 - 35\,000 = 165\,000 \text{ dh}$$

Et ainsi de suite …

Remarque :

1) Le dernier amortissement n'a pas été donné, son calcul ne pose aucun problème :

$$M_6 = 200\,000 - (35\,000 + 20\,000 + 500\,000 + 40\,000 + 10\,000)$$
$$M_6 = 45\,000 \text{ dh}$$

Ou encore

$$M_6 = C_5 = 45\,000 \text{ dh}$$

2) Dans cet exemple les amortissements n'obéissent à aucune loi et sont distribués de manière tout à fait aléatoire.

Quelques propriétés :

Le capital initial et les annuités de remboursement peuvent faire l'objet d'écritures dans un compte courant à taux réciproque (le taux i de l'emprunt).

Le compte courant de l'emprunteur, tenu par le prêteur se présente comme suit :

Epoque	Débit	Crédit
0	C	
1		a_1
2		a_2
…	…	…
n		a_n

A l'époque n, juste après le dernier versement le solde (débit crédit) est nul :

$$S_n = C\,(1 + i)^n - \sum_{k=1}^{n} a_k\,(1 + i)^{n-k} = 0$$

Ou encore

$$C_n\,(1 + i)^n = \sum_{k=1}^{n} a_k\,(1 + i)^{n-k} \qquad (1)$$

La dette initiale, estimée à l'époque n, est égale à la somme des valeurs acquises par chacun des versements de remboursement. En multipliant par $(1 + i)^n$ on se situe à l'époque 0 :

$$C = \sum_{k=1}^{n} a_k (1 + i)^{-k} \qquad (2)$$

Ainsi la dette initiale est égale à la somme des valeurs actuelles de chacune des annuités de remboursement (engagements de l'emprunteur). Le solde S_p, juste après le paiement de la $p^{ème}$ annuité s'écrit :

$$S_p = C (1 + i)^p - \sum_{k=1}^{p} a_k (1 + i)^{p-k} \qquad (3)$$

En remplaçant C par l'expression obtenu dans (2) on écrit :

$$S_p = \sum_{k=1}^{n} a_k (1 + i)^{p-k} - \sum_{k=1}^{p} a_k (1 + i)^{p-k}$$

ou encore :

$$S_p = \sum_{k=1}^{n} a_k (1 + i)^{p-k} - \sum_{k=1}^{p} a_k (1 + i)^{p-k} - \sum_{k=1}^{p} a_k (1 + i)^{p-k}$$

Ce qui donne :

$$S_p = \sum_{k=p+1}^{n} a_k (1 + i)^{-(k-p)} \qquad (4)$$

Ainsi, le capital restant dû (ou encore dette vivante DV) à l'époque p, juste après le paiement de l'annuité de rang p, est égale à la somme des valeurs actuelles, à cette époque, des annuités non échues.

3- Amortissement par annuités constantes :

3-1- Construction du tableau d'amortissement et propriétés :

La somme de l'intérêt de la période et de l'amortissement est constante.

Cette somme peut être calculée à l'aide de la formule.

$$a = C \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

La dette remboursée (DR) et l'intérêt de la période vont en diminuant, et donc l'amortissement va en augmentant (amortissement progressif). Il serait intéressant de maîtriser le comportement des amortissements d'une période à l'autre ; écrivons, pour cela deux annuités successives : $a_p = C_{p-1}\, i + M_p$

et

$$a_{p+1} = C_p\, i + M_{p+1}$$

On sait que : $a_p = a_{p+1} \Leftrightarrow C_{p-1}\, i + M_p = C_p\, i + M_{p+1}$

Or $C_p = C_{p-1} - M_p$

Ce qui nous donne :

$$C_p + M_p\, i = M_{p+1}$$

et donc: $\boxed{M_{p+1} = M_p(1 + i)}$

Les amortissements sont donc en progression géométrique de raison (1 + i) ; calculons en le premier terme :

$$C = M_1 + M_2 + \ldots + M_n = M_1 + M_1 (1 + i) + \ldots M_1 (1 + i)^{n-1}$$

$$C = M_1 \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

D' où $\boxed{M_1 = C \frac{i}{(1 + i)^n - 1}}$

Ainsi, pour construire le tableau d'amortissement on peut procéder de 2 manières différentes:

* On calcule d'abord l'annuité constante. Pour la 1ère ligne, on commence par calculer l'intérêt, par soustraction ($a - I_1$) on obtient le premier amortissement de la dette au début de la deuxième période, ce qui permet de construire la deuxième ligne et ainsi de suite…

On vérifie, en suite, que les amortissements sont en progression géométrique et que leur somme donne le capital initial.

* On calcule le premier amortissement. En multipliant à chaque fois par (1 + i) on obtient la colonne des amortissements et, avec cela, la colonne du capital en début de période (CDP). Il devient aisé de calculer l'intérêt et l'annuité.

Exemple :

Une personne emprunte 350 000 dh auprès d'une banque et s'engage à verser 8 annuités constantes, la première payable 1 ans après la date du contrat. Sachant que le taux est de 12 % l'an, construire le tableau d'amortissement de l'emprunt l'annuité de remboursement.

$$a = 350\,000 \frac{0{,}12}{1-1{,}12^{-8}} = 70\,455{,}99 \text{ dh}$$

D'où le tableau d'amortissement :

Période	CDP	I	AMORT	ANNU	CFP
1	350 000,00	42 000,00	28 455,99	70 455,99	321 544,01
2	321 544,01	38 585,28	31 870,71	70 455,99	289 673,29
3	289 673,29	34 760,80	35 695,20	70 455,99	253 978,09
4	253 978,09	30 477,37	39 978,62	70 455,99	213 999,47
5	213 999,47	25 679,94	44 776,06	70 455,99	169 223,41
6	169 223,41	20 306,81	50 149,19	70 455,99	119 074,23
7	119 074,23	14 288,91	56 167,09	70 455,99	62 907,14
8	62 907,14	7 548,86	62 907,14	70 455,99	0

Remarque :

1) Les amortissements sont bien en progression géométrique. Par exemple :

$$\frac{35\,695{,}20}{31\,870{,}71} = 1{,}12$$

2) Le tableau peut être construit à partir de la colonne des amortissements :

$$M1 = 350\,000 \frac{0{,}12}{1{,}12^{8} - 1} = 28\,455{,}99 \text{ dh}$$

En multipliant à chaque fois par 1,12 on obtient les autres amortissements.

3-2- Calcul du capital restant dû :

Si l'on dispose du tableau d'amortissement, alors le lecture de la dette restante ne pose aucune problème. Dans l'exemple précédent on lit à la dernière colonne la somme

de 213 999,47 dh ; celle-ci correspond à la dette encore vivante (DV), juste après le paiement de la 4ème annuité. Le capital restant dû être calculé à l'aide de formules :

* A partir de la 3ème propriété du paragraphe 6-2-2 on écrit :

$$DVp = Sp = C\,(1 + i)^p - a\,\frac{(1 + i)^p - 1}{i}$$

* De même si on utilise la 4ème propriété on obtient :

$$DVp = Sp = a\,\frac{(1 + i)^{-(n-p)}}{i}$$

* DV_p peut, cependant, être calculé autrement

Dette vivante = dette initiale – dette remboursée

$$DVp = C - (M_1 + M_2 + \ldots + M_p)$$

$$DVp = C - M_1\,\frac{(1 + i)^{-(n-p)}}{i}$$

$$DVp = C - C\,\frac{i}{(1 + i)^n - 1}\ x\ \frac{(1 + i)^p - 1}{i}$$

Ca qui donne en definitive

$$DVp = Sp = C\,\frac{(1 + i)^n - (1 + i)^p}{(1 + i)^n - 1}$$

Exemple :

Reprenons l'exemple précédent et calculons la dette restante juste après le versement du 5ème terme.

$$DV_5 = 350\,000 \times 1{,}12^5 = 70\,455{,}99\,\frac{1{,}12^5 - 1}{0{,}12} = 169\,223{,}41 \text{ dh}$$

Ou encore

$$DV_5 = 70\,455{,}99\,\frac{1 - 1{,}12^{-3}}{0{,}12} = 169\,223{,}41 \text{ dh}$$

Ou encore

$$DV_5 = 350\,000\,\frac{1{,}12^8 - 1{,}12^3}{1{,}12^8 - 1} = 169\,223{,}41 \text{ dh}$$

Remarque :

Pour obtenir ces résultats on a tenu compte, au niveau de l'annuité, de tous les chiffres après la virgule.

3-3- La prise en compte de la taxe sur la valeur ajoutée (TVA) :

La TVA concerne les intérêts débiteurs ; ainsi, si celle-ci est de 10 %, alors pour 100 dh d'intérêts versés au banquier, par exemple, il importe d'ajouter 10 dh de taxe, on se retrouve alors avec 1 10 dh d'intérêt toutes taxes comprises : (T.T.C).

Pour tenir compte de la TVA on intègre une colonne spéciale à cet effet. Seulement, l'annuité de remboursement s'en trouve modifiée ; celle-ci ne sera plus constante mais en légère diminution (on ajoute à un terme constant une taxe qui diminue avec l'intérêt). Pour rendre constante l'annuité effective (I + TVA + Amort) il importe d'utiliser le taux d'intérêt intégrant la TVA (taux TTC).

Exemple :

Un emprunt de 500 000 dh est amortissement par le versement de 6 annuités constantes la première venant à échéance un an après la date du contrat.

Taux : 12 % l'an. TVA : 10 % sur les intérêts.

On calcule d'abord le taux TTC : pour un capital de 100 dh on verse 12 dh d'intérêt par an, et pour 12 dh on verse 1,2 dh de TVA (12 x 0,01 = 1,2). On verse, en définitive, pour un capital emprunté de 100 dh, un intérêt de 13,2 dh par an (TTC).

Le taux est alors de 13,2 % l'an (i' = 0,132). A partir de ce taux On calcule l'annuité :

$$a = 500\,000 \frac{0{,}132}{1-1{,}132^{-6}} = 125\,774{,}00 \text{ dh}$$

D'où le tableau d'amortissement :

Année	CDP	I	TVA	AMORT	ANNU	CFP
1	500 000,00	60 000,00	6 000,00	59 774,00	125 774,00	440 226,00
2	440 226,00	52 827,12	5 282,71	67 661,17	125 774,00	372 561,84
3	372 561,84	44 707,42	4 470,74	76 595,84	125 774,00	295 966,00
4	295 966,00	35 515,92	3 551,59	86 706,49	125 774,00	209 259,51
5	209 259,51	25 111,14	2 511,11	98 151,74	125 774,00	111 107,77
6	111 107,77	13 332,93	1 333,29	111 107,77	125 774,00	0,00

Remarque :

1) Il importe de souligner que, dans le tableau, l'intérêt I est calculé à 12 % et non à 13,2 %.
2) Toutes les propriétés rencontrées précédemment sont vérifiés ici : par exemple les amortissements sont en progression géométrique de raison 1,132…
3)

4- Amortissements constants :

La construction du tableau d'amortissement est encore plus simple que dans le cas des annuités constantes puisque l'amortissement est réparti de manière uniforme sur l'ensemble des périodes :

$$M = C / n$$

Notons, Qu'ici, comme l'intérêt baisse de période en période, on se retrouve, en définitive avec une annuité en diminution. Ecrivons deux annuités successives :

$$a_p = C_{p-1}\, i + M_p \qquad \text{et} \quad a_{p+1} = C_p\, i + M_{p+1}$$

$$M_p = M_{p+1} = M \qquad \text{et} \quad C_p = C_{p-1} - M_p$$

Ce qui sonne :

$$a_{p+1} - a_p = (C_{p-1} - M)\, i - C_{p-1}\, i$$

$$a_{p+1} - a_p = - M\, i = - (C / n)\, i$$

Les annuités sont donc en progression arithmétique de raison – (C /n) i et de premier terme Ci + C/n

Exemple :

Un emprunt de 300 000 dh est remboursable en 6 annuités, la première payable un an après la date du contrat.

Sachant que l'amortissement est constant et que le taux est de 11,5 % l'an, construire le tableau d'amortissement de cet emprunt.

Chaque année on paie 50 000 dh (300 000 : 6) au titre d'amortissement ; d'où le tableau.

Période	CDP	I	AMORT	ANNU	CFP
1	300 000,00	34 500,00	50 000,00	84 500,00	250 000,00
2	250 000,00	28 750,00	50 000,00	78 750,00	200 000,00
3	200 000,00	23 000,00	50 000,00	73 000,00	150 000,00
4	150 000,00	17 250,00	50 000,00	67 250,00	100 000,00
5	100 000,00	11 500,00	50 000,00	61 700,00	50 000,00
6	50 000,00	5 750,00	50 000,00	55 750,00	0

Remarque :

1) Chaque année l'annuité diminue de 5 750 dh (50 000 x 0,115).
2) On peut intégrer la TVA dans le tableau. Celle-ci ne pose pas de problème puisque nous n'avons plus cette contrainte de rendre l'annuité constante.

5- Emprunts amortissables en une seule fois : système américain :

Ce système a été exposé précédemment ; l'emprunteur ne verse que l'intérêt Ci de la dette mais, à la fin, avec l'intérêt de la dernière période le capital C est remboursé en bloc.

En général l'emprunteur prépare l'échéance de ce paiement en plaçant à la fin de chaque année un fonds d'amortissement M. Seulement, le taux de placement a de forte chance d'être inférieur au taux de l'emprunt. En effet, généralement, pour un particulier, le taux débiteur est supérieur au taux créditeur.

Exemple :

Un particulier emprunte auprès d'une banque la somme de 250 000 dh. Cette somme est remboursable à la fin de la 8ème année. L'emprunteur s'engage alors à verser à la fin de chaque année l'intérêt de la dette. Taux : 12 % l'an.

Par ailleurs, ce particulier, arrive à placer à 9 %, au terme de chaque année et ceci pendant 7 ans une somme S destinée à préparer l'échéance des 250 000 dh.

Calculer S et l'annuité effective.

$$250\,000 = S\,\frac{1{,}09^{7} - 1}{0{,}09} \times 1{,}09 \quad \Rightarrow \quad S = 24\,929{,}02 \text{ dh}$$

Par ailleurs l'intérêt à verser à la fin de chaque année s'élève à 30 000 dh. Ce qui donne une annuité effective de 54 929,02 dh (24 929,02 + 30 000) à verser par l'emprunteur pendant 7 ans. A la fin de la 8ème année il ne versera que 30 000 dh.

Remarque :

1) Dans le système d'amortissement par annuités constantes on aurait obtenu :

$$a = 250\,000\,\frac{0{,}12}{1 - 1{,}12^{-8}} = 50\,325{,}71 \text{ dh}$$

2) Pour comparer les deux systèmes, actualisons les engagements de l'emprunteur à 12 % à la date du contrat :

* dans le système américain on a :

$$A_0 = 54\,929{,}02\,\frac{1 - 1{,}12^{-7}}{0{,}12} + 30\,000 \times 1{,}12^{-8}$$

$$A_0 = 262\,799{,}16 \text{ dh}$$

* dans le système d'amortissement par annuités constantes on a :

$$A_0 = 54\,325{,}71\,\frac{1 - 1{,}12^{-8}}{0{,}12} = 250\,000 \text{ dh}$$

On mesure bien l'inconvénient du système américain puisqu'à 12 % et pour les mêmes engagements (54 929,02 dh pendant 7 ans et 30 000 dh à la fin de la 8ème année) le capital emprunté aurait dû être de 262 799,16 dh et non de 250 000 dh.

Dans le système américain le taux effectif t (qui n'a de sens que pour l'emprunteur) se calcule comme suit :

$$250\,000 = 54\,929{,}02\ \frac{1-(1+t)^{-7}}{t} + 30\,000\,(1+t)^{-8}$$

250 088,70	⟶	13,5
250 000	⟶	t
248 068,89	⟶	13,75

$$t = 13{,}5 - 0{,}25\ \frac{250\,000 - 250\,088{,}70}{248\,068{,}89 - 250\,088{,}70} = 13{,}51$$

Soit : 13,51 %