Chapitre : Les rapports et les proportions

I- rapports et proportions

1- Rapport

Le rapport d'un nombre (a) à un autre nombre (b) est le quotient (K) de ces deux nombres

$$\frac{a}{b} = K$$

Exemples

- Le rapport de 32 à 8 est : $\frac{32}{8} = 4$
- Le rapport de 13 à 2 est : $\frac{13}{2} = 6{,}5$

2- Proportion

La proportion est l'égalité formée de deux rapports

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Exemples

$$\frac{4}{7} = \frac{16}{28}$$

$$\frac{13}{5} = \frac{26}{10}$$

Dans la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, les nombres : - a et b sont appelés les **extrêmes**
- b et c sont appelés les **moyens**

3- Propriétés des proportions

Lorsqu'on dispose d'une proportion, on peut effectuer différentes transformations.

3- 1- Dans toute proportion, le **produit** des extrêmes est égal au **produit** des moyens.

Soit $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Réduisons les deux fractions au même dénominateur commun (b x d) : $\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{c \times b}{d \times b}$

Chassons les dénominateurs. Il reste alors :

$$a \times d = c \times b$$

3-2- Disposant de quatre nombres tels que le produit de deux d'entre eux est égal au produit des deux autres, on conclut que ces quatre nombres forment une proportion, soit quatre nombres a, b, c et d tels que :

$$a \times d = b \times c$$

Divisons tout d'abord les deux membres de l'égalité par b :

$$\frac{a \times d}{d} = \frac{b \times c}{b}$$

$$\frac{a \times d}{b} = c.$$

Ensuite, divisons les deux membres de la nouvelle égalité par d : $\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{c}{d}$.

Après simplification du premier membre de l'égalité, on obtient :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

3-3- Dans une proportion donnée, on peut permuter (changer de place) les extrêmes entre eux et les moyens entre eux.

Soit la proportion : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Utilisons la propriété vue au **3-1-**
Elle nous permet d'écrire : **a** x **d = b** x **c**. Or, si on change la place des 4 termes, on obtient le même résultat. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \longrightarrow \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \longrightarrow$ **d** x **a = c** x **b**.

Cette dernière égalité est identique à la précédente.

(**Rappel** : la valeur d'un produit de plusieurs facteurs est indépendante de l'ordre de ces facteurs.)

Exemple
Soit la proportion : $\frac{4}{7} = \frac{12}{21}$

$\frac{4}{7} = \frac{12}{21}$

On peut écrire :

4 x 21 = 7 x 12

84 = 84

$\frac{4}{7} = \frac{12}{21}$

Permutons les extrêmes et les moyens.

$\frac{21}{12} = \frac{7}{4}$

21 x 4 = 12 x 7
84 = 84

On remarque que le résultat est le même.

3-4- Si deux rapports forment une proportion, on obtient un rapport égal aux deux premiers en prenant pour numérateur la **somme** des numérateurs et pour dénominateur la **somme** des dénominateurs.

Soit la proportion : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

On peut écrire : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = K$ (1).

D'où : $\frac{a}{b} = K \longrightarrow a = bK$

$$\frac{c}{d} = K \xrightarrow{+} \begin{array}{l} c = dK \\ \hline a + c = bK + dK \\ a + c = K(b + d) \end{array}$$

$$K = \frac{a + c}{b + d}$$

ce qui nous permet d'écrire finalement en reprenant K dans (1) :

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d}}$$

3-5- On obtient aussi un rapport égal si on utilise la **différence**.

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a - c}{b - d}}$$

3-6- Multiplions les deux termes du rapport $\frac{a}{b}$ par le nombre relatif x et les deux termes du rapport $\frac{c}{d}$ par le nombre relatif y.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\boxed{\frac{ax}{bx} = \frac{cy}{dy} = \frac{ax + cy}{bx + dy}}$$

Exemple

Soit la proportion $\frac{7}{3} = \frac{28}{12}$

Multiplions respectivement les rapports par :

x = 3

y = -5

$$\frac{7}{3} = \frac{28}{12} = \frac{(7 \times 3) - (28 \times 5)}{(3 \times 3) - (12 \times 5)} = \frac{21 - 140}{9 - 60}$$

$$\rightarrow \frac{-119}{-51} = \frac{119}{51}$$

4- Suite de rapports égaux

Disposant de plusieurs rapports égaux, on peut former une suite de ces rapports égaux.

Soit : $\frac{a}{b} = K$; $\frac{c}{d} = K$ et $\frac{e}{f} = K$.

On peut former une suite ayant la forme suivante :

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}}$$

5- Propriétés des suites de rapports égaux

Elles ont les mêmes propriétés que les proportions.

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a + c + e}{b + d + f}}$$

et d'une façon générale :

soit la suite : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$

si on multiplie les termes de chaque rapport par un nombre relatif, on obtient :

$$\frac{a}{b} = \frac{ax}{bx} ; \quad \frac{c}{d} = \frac{cy}{dy} \text{ et } \frac{e}{f} = \frac{ez}{fz}$$

et on peut les écrire sous la forme suivante :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{ax+ cy+ ez}{bx + dy + fz}$$

Exemple

Soit la suite : $\frac{5}{3} = \frac{10}{6} = \frac{30}{18}$

si : $x = 7,\ y = -4$ et $z = -2$

On obtient : $\frac{5}{3} = \frac{10}{6} = \frac{30}{18} = \frac{(5 \times 7) + [10 \times (-4)] + [30 \times (-2)]}{(3 \times 7) + [6 \times (-4)] + [18 \times (-2)]}$

$$= \frac{35 - 40 - 60}{21 - 24 - 36} = \frac{-65}{-39} = \frac{65}{39}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{10}{6} = \frac{30}{18} = \frac{65}{39}$$

II- Grandeurs proportionnelles

1- Grandeurs directement proportionnelles

1-1- Exemple

Soit le tableau ci-après :

Salaire encaissé	Nombre d'heures de travail	Rapport (taux horaire)
1 050 DH	42 heures	$\frac{1\,050}{42} = 25$
1 700 DH	68 heures	$\frac{1\,700}{68} = 25$
2 350 DH	94 heures	$\frac{2\,350}{94} = 25$
2 550 DH	102 heures	$\frac{2\,550}{102} = 25$
3 100 DH	124 heures	$\frac{3\,100}{124} = 25$
……	……..	……..
A DH	B heures	$\frac{A}{} = K(25)$

		B

1-2- Constatation

- le rapport de chaque salaire à la durée correspondante est constant (25) ;
- ces valeurs forment une suite de nombres directement proportionnels.

1-3- Conclusion

On dit que les « salaires » et les « durées » correspondantes sont deux grandeurs directement proportionnelles.

1-4- Définition

Deux grandeurs qui varient simultanément sont directement proportionnelles quand le rapport des mesures correspondantes est constant.

Exemple de grandeurs directement proportionnelles

- **prix** d'une marchandise et son **poids**;
- **salaire** d'un ouvrier (payé à la pièce) et **nombre de pièces fabriquées**;
- **prime d'ancienneté encaissée** par un ouvrier et **nombre d'années de travail** ; etc.

Les grandeurs a, b, et c
sont proportionnelles à A, B, et C

si l'on peut écrire : $\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$

Exemple

Les grandeurs : 14, 24, et 30
sont proportionnelles à : 42, 72, et 90

si l'on peut écrire : $\frac{14}{42} = \frac{24}{72} = \frac{30}{90}$

1-5- Propriétés

1- Soient a et b deux mesures de grandeurs directement proportionnelles et K la valeur du rapport constant appelé **COEFFICIENT DE PROPORTIONNALITE.**

De la définition, il découle : $\frac{a}{b} = K \iff a = Kb$

Lorsque deux grandeurs sont directement proportionnelles, la mesure de l'une est égale au produit de la mesure correspondante de l'autre par le coefficient de proportionnalité.

2- Soient (y_1, x_1) et (y_2, x_2) deux couples de mesures correspondantes de deux grandeurs proportionnelles, de la définition, il découle :

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} (= K) \iff \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}$$

Lorsque deux grandeurs sont directement proportionnelles, le rapport de deux mesures quelconques de l'une est égal au rapport de deux mesures correspondantes de l'autre.

Du tableau du B-1. 1er paragraphe, on vérifie que :

$$\frac{2\,350}{1\,700} = \frac{94}{68}$$

3- Soient y et x un couple de mesures correspondantes de deux grandeurs directement proportionnelles, il découle :

$$\frac{y}{x} = K \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y \times m}{x \times m} = \dfrac{y}{x} = K \\ \dfrac{y : m}{x : m} = \dfrac{y}{x} = K \end{cases}$$

Lorsque deux grandeurs sont directement proportionnelles, si la mesure de l'une est multipliée (ou divisée) par un nombre quelconque, la mesure correspondante de l'autre est multipliée (ou divisée) par le même nombre.

Du tableau du B – 1. 1er paragraphe, on vérifie qu'au couple (1 700 ; 68) correspondant le couple (2 550 ; 1 02).

$$\begin{array}{rr} 1\,700 & 68 \\ \times\ \mathbf{1,5} & \times\ \mathbf{1,5} \\ \hline 2\,550 & 102 \end{array}$$

2- Grandeurs inversement proportionnelles

2-1- Exemple

Le tableau suivant donne le nombre d'articles (de prix unitaires variables) qu'on peut acquérir avec 10 000 DH.

Nombre d'articles	Prix unitaire	Produit des mesures
250	40	250 x 40 = 10 000
200	50	200 x 50 = 10 000
125	80	125 x 80 = 10 000
100	100	100 x 100 = 10 000
….	….	….
y	x	y × x = K

2-2 Constatation

- le produit des couples de mesures correspondantes est constant (10 000) ;
- ces mesures forment une suite de nombres inversement proportionnels.

2-3 Conclusion

On dit que le nombre d'articles achetés et le prix unitaire correspondant sont deux grandeurs inversement proportionnelles.

2-4- Définition

Deux grandeurs qui varient simultanément sont inversement proportionnelles quand le **produit** de leurs mesures correspondantes est **constant**.

Exemple de grandeurs inversement proportionnelles

- la durée d'un trajet et la vitesse ;
- pour un travail donné, le nombre d'ouvrier et le temps à passer pour l'exécuter…, en supposant une durée de travail uniforme pour chaque ouvrier.

2-5- Propriétés

1- Soient y et x deux mesures de grandeurs inversement proportionnelles et K le produit constant ;

$$yx = K \Leftrightarrow \frac{y}{\frac{1}{x}} = K$$

expression qui signifie que y est proportionnel à $\frac{1}{x}$ d'où :

Lorsque deux grandeurs sont inversement proportionnelles, les mesures de l'une d'elles sont directement proportionnelles aux **inverses** des mesures correspondantes de l'autre.

On vérifie que : $\frac{250}{\frac{1}{40}} = \frac{200}{\frac{1}{50}} = \frac{125}{\frac{1}{80}} = \frac{100}{\frac{1}{100}} = 10\,000$

d'où : $250 \times \frac{40}{1} = 10\,000$; $200 \times \frac{50}{1} = 10\,000$

$125 \times \frac{80}{1} = 10\,000$ et $100 \times \frac{100}{1} = 10\,000$.

2- Soient (y_1, x_1) et (y_2, x_2) deux couples de mesures correspondantes de deux grandeurs inversement proportionnelles :

$$y_1 \times x_1 = y_2 \times x_2 = K$$

ou $$\frac{y_1}{\frac{1}{x_1}} = \frac{y_2}{\frac{1}{x_2}} = K$$

En permutant les moyens, on obtient : $$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\frac{1}{x_1}}{\frac{1}{x_2}}$$

soit en transformant le deuxième membre de l'égalité : $$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

Lorsque deux grandeurs sont inversement proportionnelles, le rapport de deux mesures quelconques de l'une est égal au rapport inverse de deux mesures correspondantes de l'autre.

On vérifie que : $\frac{250}{200} = \frac{50}{40} \rightarrow$ { 250 x 40 = 10 000 ; 200 x 50 = 10 000.

3- Soit y et x un couple de grandeurs inversement proportionnelles.

On a : $$\frac{y}{\frac{1}{x}} = K \Leftrightarrow \frac{y \times m}{\frac{1}{x} \times m} = \frac{y \times m}{\frac{m}{x}}$$

qui donne : $$(y \times m)\left(\frac{x}{m}\right) = K.$$

Lorsque deux grandeurs sont inversement proportionnelles, si la mesure de l'une est MULTIPLIEE (ou divisée) par un nombre quelconque, la mesure de l'autre est DIVISEE (ou multipliée) par ce nombre.

- Vérification :

Au couple de valeurs (250 ; 40) correspondant le couple (125 ; 80),
C'est ainsi que pour obtenir :

- 125 ⟶ 250 **:** **2** = 125
- 80 ⟶ 40 **x** **2** = 80

3- Grandeurs directement proportionnelles à plusieurs autres

3-1 Exemple

Le tableau suivant donne le prix d'un terrain en fonction de ses dimensions (longueur et largeur).

Prix	Longueur	Largeur	Rapport : $\frac{\text{Prix}}{\text{surface}}$
70 000	10	7	$\frac{70\,000}{10 \times 7} = 1\,000$
210 000 (= 70 000 x 3)	30 (= 10 x 3)	7	$\frac{210\,000}{30 \times 7} = 1\,000$
420 000 (= 210 000 x 2)	30	14 (= 7 x 2)	$\frac{420\,000}{30 \times 7} = 1\,000$
…	…	…	…
P	x	y	$\frac{P}{x \times y} = 1\,000\ (= K)$

On constate que :
- le prix est directement proportionnel à la longueur et aussi à la largeur ;
- le rapport du prix au produit des mesures correspondantes des longueur et largeur est constant.

3-2- Définition

Une grandeur est directement proportionnelle à plusieurs autres si elle est directement proportionnelle à chacune d'elles.

3-3- Propriétés

1- Lorsqu'une grandeur est directement proportionnelle à plusieurs autres, le rapport d'une mesure quelconque de cette première grandeur au produit des mesures correspondantes des autres est constant (voir tableau, 4e colonne).

2- Une mesure quelconque d'une grandeur proportionnelle à plusieurs autres est égale au produit des mesures correspondantes des grandeurs auxquelles elle est proportionnelle par le coefficient de proportionnalité.

On a : $\dfrac{P}{x \times y} = K \iff P = K \times x \times y$

III – Partages proportionnels

1 – Grandes directement proportionnelles

1-1- Définition

Partager un nombre N proportionnellement aux nombres donnés a, b et c, c'est déterminer les nombres x, y et z tels que l'ont ait la suite des rapports égaux :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \text{ avec } x + y + z = N$$

1-2- Calcul de x, y et z

Nous proposons une solution simple. Posons une suite de rapports égaux.

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x + y + z}{a + b + c} = \frac{N}{a + b + c} = K$$

d'où : $\dfrac{x}{a} = K \longrightarrow x = a \times K \quad (1)$

$\dfrac{y}{b} = K \longrightarrow y = b \times K \quad (2)$

$\dfrac{z}{c} = K \longrightarrow z = c \times K \quad (3)$

$x + y + z = aK + bK + cK$

$x + y + z = K(a + b + c)$

$$K = \frac{x + y + z}{a + b + c} = \frac{N}{a + b + c}$$

En remplaçant K par sa valeur dans les expressions (1), (2) et (3), nous trouvons les valeurs de x, y et z.

2- Grandeurs inversement proportionnelles

- **définition**

Partager un nombre N inversement proportionnellement aux nombres données a, b et c, c'est déterminer les nombres x, y et z tels que l'on ait la suite des rapports égaux :

$$\frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{z}{\frac{1}{c}} \quad \text{avec } x + y + z = N$$

N.B : ce problème revient en quelque sorte à partager un nombre aux inverses des nombres donnés.

APPLICATIONS

- **Application 1**

  Partager 80 000 DH proportionnellement à 5, 4 et 11.

- Solution

Soient x, y et z les trois nombres demandés.

On a : $\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{11}$ avec $x + y + z = 80\,000$

$\frac{x}{5} = K \longrightarrow x = 5K$

$\frac{y}{4} = K \longrightarrow y = 4K$

$\frac{z}{11} = K \longrightarrow z = 11K$

$x + y + z = 20K$

$80\,000 = 20K \longrightarrow K = \frac{80\,000}{20}$

$K = 4\,000$

d'où : x = 5 x 4 000 = 20 000 DH
y = 4 x 4 000 = 16 000 DH
z = 11 x 4 000 = 44 000 DH

- Vérification : 80 000 DH.

- **Application 2**
  Partager 15 300 DH inversement proportionnellement aux nombres 3, 4 et 8.

- Solution

Soient x, y et z les nombres demandés ; on a :

$$\frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{4}} = \frac{z}{\frac{1}{8}} \quad \text{avec } x + y + z = 15\,300$$

On réduit au même dénominateur les fractions $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{8}$.

D.C. = 24

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 8}{3 \times 8} = \frac{8}{24} \; ; \frac{1}{4} = \frac{1 \times 6}{4 \times 6} = \frac{6}{24} \text{ et } \frac{1}{8} = \frac{1 \times 3}{8 \times 3} = \frac{3}{24}.$$

Le problème revient donc à partager 15 300 proportionnellement à $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{8}$ ou

Proportionnellement à $\frac{8}{24}$, $\frac{6}{24}$ et $\frac{3}{24}$ ou encore à 8, 6 et 3.

Alors nous pouvons poser : $\frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{4}} = \frac{z}{\frac{1}{8}}$ ou $\frac{x}{\frac{8}{24}} = \frac{y}{\frac{6}{24}} = \frac{z}{\frac{3}{24}}$

ou encore : $\frac{x}{8} = \frac{y}{6} = \frac{z}{3} = K$

d'où : $\frac{x}{8} = K \longrightarrow x = 8\,K$

$\frac{y}{6} = K \longrightarrow y = 6\,K$

$\frac{z}{3} = K \longrightarrow z = 3\,K$

$x + y + z = 17\,K$

$$K = \frac{x + y + z}{17} = \frac{15\,300}{17} = \mathbf{900}$$

Remplaçant K par sa valeur.

x = 8 x 900 = 7 200 DH
y = 6 x 900 = 5 400 DH
z = 3 x 900 = 2 700 DH

- Vérification : 15 300 DH.