Module : Techniques quantitatives de gestion

Chapitre 4 : L'étude des moyennes d'une série statistique

En plus de la médiane et du mode présentés dans le chapitre précédent, existent une variété de moyennes qui jouent un rôle complémentaire aux caractéristiques précédentes. En effet, parmi les instruments les plus utilisés en statistique, la moyenne arithmétiques et d'autres moyennes adaptées à des données particulières (moyenne géométrique, moyenne harmonique, …) constituent des instruments privilégiés pour comparer différentes séries statistiques. Dans ce chapitre nous présenterons dans un premier point la moyenne arithmétique et dans un deuxième point les autres types de moyennes.

4-1- La moyenne arithmétique

La moyenne arithmétique se note $\bar{x}$. C'est la moyenne de grandeur la plus simple à déterminer et la plus facile à saisir. C'est également la plus répandue : lorsqu'on parle de moyenne sans précision, il s'agit de la moyenne arithmétique.

4-1-1- Moyenne arithmétique simple

La moyenne arithmétique d'une série de n termes est le quotient de leur somme par leur nombre. Elle répond donc à la formule :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i \qquad (1)$$

ou encore

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i} x_i$$

$\sum_{i} x_i$ étant la somme des termes

n étant le nombre des termes.

Applica**tion à la série n°1**

$\sum_i xi = 110$ n = 10 $\bar{x} = 110/10 = 11$

Pour cet échantillon de 10 étudiants, la note moyenne calculée est de 11 points. Nous observations que cette note n'a été effectivement obtenue par aucun des 10 étudiants. C'est dire que $\bar{x}$ n'a pas de signification concrète : il en est de même pour le comportement du « consommateur moyen » ou du « citoyen moyen ».

4-1-2- Moyenne arithmétique pondérée

Dans la formule précédente, on accorde la même importance à chaque terme de la série. Or, dans la plupart des collectivités recensées, certains éléments ont plus d'importance que d'autres. C'est pourquoi un « poids » va traduire la plus ou moins grande importance accordée à chaque observation : chaque valeur xi sera affectée d'un « poids approprié » noté pi sous la forme du produits xi pi.

Dans la formule de $\bar{x}$, le numérateur deviendra donc $\sum_i xipi$ (pour tenir compte de toutes les valeurs et de tous les poids correspondants).

Mais pour rétablir « l'équilibre » dans la formule, il faudra donc diviser par la somme de tous les « poids » introduits $\sum$ pi, qui n'est autre que la pondération totale, en général un multiple de 10.

La formule générale de toute moyenne arithmétique pondérée est donc :

$$\sum xi\ pi / \sum pi \qquad (2)$$

Exemple :

Un examen comporte 4 épreuves dont les coefficients respectifs sont : 2, 4, 3 et 1. La condition du succès est l'obtention d'une moyenne générale de 10/20. Un étudiant obtient les 4 notes de base suivantes : 8, 13, 11, et 4. Sans application de coefficients, l'étudiant est éliminé avec une moyenne de $\bar{x}$ = 36/4 = 9 points. Avec application de coefficients (moyenne pondérée), le candidat est reçu avec une moyenne de 10.5 points.

Tableau de calcul

xi	pi	xipi
8	2	16
13	4	52
11	3	33
4	1	4
	10	105

Lecture de tableau :
La note x1 = 8 points est affectée du coefficient p1 = 2
Le produit x1.p1 obtenu est donc égal à 16
La note x2 = 13 points est affectée du coefficient p2 = 4
Le produit x2.p2 obtenu est donc égal à 52

$\sum_i pi = 10$ $\sum_i pi\ xi = 105$ $\bar{x} = 105/10 = 10.5$ points.

On observe que la valeur de $\bar{x}$ est « attirée » par les coefficients de pondération les plus importantes.

4-1-3- Moyennes arithmétique d'observations répétées

La série n° 2 fournit l'exemple-type d'une distribution où chaque valeur de la variable (nombre d'enfants) est répétée un certain nombre de fois (n). Nous avons déjà vu que la répétition se mesure par un effectif (ni) qui s'applique à chaque valeur xi.

Dans ce cas particulier, ni joue le rôle du coefficient de pondération pi et se substitue donc à lui pour les distributions de fréquences à variables discontinue :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{i=k} xini}{\sum_{i=1}^{i=k} ni} \qquad \bar{x} = \frac{\sum_i nixi}{\sum ni} \qquad (3)$$

4-1-4- Propriété fondamentale de la moyenne arithmétique

La somme des écarts des valeurs d'une série à leur moyenne est nulle :

$\sum_i (xi - \bar{x}) = 0$ (4)

Nous limiterons la vérification de la formule (4) à la série n° 1 (sans effectif) :

Xi	→	2	6	8	9	10	13	14	15	16	17
$(xi - \bar{x})$	→	-9	-5	-3	-2	-1	+2	+3	+4	+5	+6

← $\sum$ (-) = 20 → ← $\sum$ (+) = 20 On →

détermine pour chaque valeur xi l'écart correspondant par rapport à $\bar{x}$:

$Xi - \bar{x} = 2 - 11 = -9$; $x2 - \bar{x} = 6 - 11 = -5$

Les sommes des écarts algébriques (négative et positive) se compensant, la formule (4) est bien vérifiée. Il existe une démonstration générale de cette formule.

4-1-5- Calcul de la moyenne arithmétique (série no 2)

Le tableau statistique relatif à la série (comportant des effectifs) se présente sous la forme de 2 colonnes qui regroupent l'ensemble des données (xi et ni). Tous les calculs statistiques font l'objet de colonnes additives au bas desquelles on positionnera le montant des différentes sommations. Le nombre de colonnes de calcul dépend de la complexité des formules utilisées.

Ainsi la formule (3) relative à la détermination de $\bar{x}$ ne réclame qu'une seule colonne de calcul pour les produits ni xi.

xi	ni	ni xi
0	24	0
1	48	48
2	40	80
3	24	72
4	16	64
5	8	40
	160	304

Le tableau comporte 6 lignes (K = 6)

Application de la formule (3) :

$$\sum_i ni = 160 \qquad \sum_i ni\, xi = 304, \qquad \bar{x} = \frac{304}{160} = 1,9$$

Commentaire

Pour cette collectivité de 160 ménages (cadres moyens), la moyenne arithmétique est 1,9 enfant. Nous vérifions une seconde fois que $\bar{x}$ n'a pas de signification concrètes (contrairement aux caractéristiques concrètes que sont le mode et la médiane).

Cependant, $\bar{x}$ reste la meilleure caractéristique de valeur centrale car elle prend en compte toutes les valeurs du tableau initial.

$\sum_i xi$ n'a pas de signification puisqu'il existe des effectifs.

La formule (3) se trouve simplifiée si on transforme les effectifs en fréquences

$$\bar{x} = \frac{\sum_i fixi}{\sum_i fi} = \sum_i fixi \text{ (puisque } \sum_i fi = 1)$$

4-1-6- Méthode du calcul simplifié (choix d'une nouvelle origine)

La variable xi est repérée par rapport à l'origine implicite 0, c'est-à-dire que xi = xi -0. En substituant à 0 une nouvelle origine notée xo, on obtient une nouvelle variable, appelée variable auxiliaire et notée zi.

Les calculs statistiques vont désormais prendre en compte

zi = xi – xo.

Comment choisir xo ? La nouvelle origine sera choisie dans la zone centrale de la distribution : on peut donc la considérer comme une moyenne provisoire.

La méthode de calcul simplifié comprend 3 étapes :

1) Transformation de la série initiale (zi prend la place de xi).
2) Calcul auxiliaire débouchant sur la moyenne auxiliaire
3) Calcul de la moyenne définitive grâce à la relation liant les 2 moyennes : $\bar{z} = \bar{x} - x0$

On notera que cette relation est du même type que : zi = xi – xo

Application à la série n° 2

On choisira xo = 2 (z1 = x1 – xo = 0-2 = -2)

zi	ni	nizi
-2	24	-48
-1	48	-48
0	40	0
+1	24	+24
+2	6	+32
+3	8	+24
$\sum_i$	160	-96 + 80 = -16

On pouvait hésiter entre les valeurs « centrales » 2 et 3 (on retient 2 qui correspond à l'effectif le plus important : 40 au lieu de 24). En transformant xi en zi, on notera que l'on transforme une suite arithmétique en suite algébrique qui annonce de futures compensations. D'autres part, une ligne de calcul est annulée

$$\bar{z} = \frac{\sum_i nizi}{\sum_i ni} = \frac{-16}{160} = -0,1$$

$\bar{x} = \bar{z} + x0 = -01 + 2 = 1.9$ (on retrouve 1.9 enfant)

Il peut arriver que $\sum_i nizi = 0$, la compensation est parfaite entre les sommes des produits négatifs et positifs.

Il en résulte que $\bar{z} = 0$, la moyenne auxiliaire est nulle. Or, comme

$\bar{z} = \bar{x} - xo$, il vient donc : $\bar{x} = x0$

Dans ce cas particulier, on a choisi comme valeur de xo précisément $\bar{x}$ (mais sans le savoir a priori).

Une telle situation (moyenne provisoire = moyenne à calculer) est assez rare puisque la valeur de $\bar{x}$ n'est généralement pas « ronde ». Elle comporte presque toujours une partie décimale pour les distributions réelles.

4-1-7- Moyenne arithmétique d'une série classée

Lorsque les nombreuses observations sont groupées en classes (variable continue), le calcul statistique paraît impossible. En effet, comment pourrait – on prendre en compte une tranche de revenu qui concernerait des dizaines voire des centaines ou des milliers de salariés ?

Nous savons que le regroupement d'une infinité de revenus en un nombre limité de classes constitue une simplification notable du tableau statistique : pour la série no 3, le tableau ne comprend que 6 lignes de données K = 6

Mais le calcul statistique réclame une seconde simplification fondamentale :

Chaque classe sera représentée par une seule valeur, le centre de classe (xi).

En notant xi, les différents centres relatifs aux classes (i), on conserve les mêmes formules que celles utilisées pour les distributions de fréquences dont la variable est discontinue.

$$\bar{x} = \frac{\sum_i nixi}{\sum_i ni} \quad \text{(série avec effectifs)} \qquad (5)$$

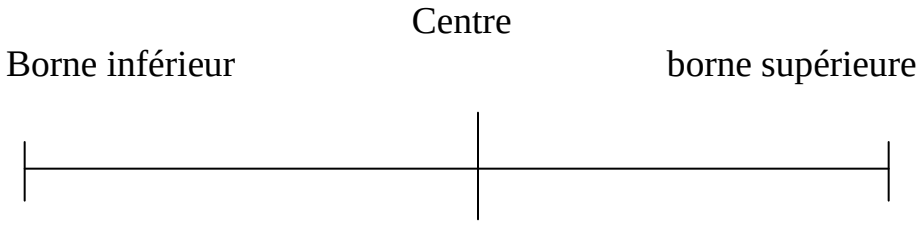
$$\bar{x} = \sum_i fixi \quad \text{(série avec fréquences)} \qquad (6)$$

xi désigne pour ces deux formules les centres de classe c'est-à-dire la demi-somme des limites de classe.

Quelques observations relatives à la démarche de calcul de la moyenne arithmétique

* Le choix « arbitraire » d'un centre de classe qui se substitue à une tranche de variable, signifie qu'on passe d'une variable continue à une variable discontinue dont les différentes valeurs sont précisément les centres de classe.

* Le calcul repose donc sur l'hypothèse de la « concentration au centre de classe», ce qui signifie que toutes les valeurs de x au sein de chaque classe sont réputées égales au centre de la classe concernée ; on fait donc l'hypothèse d'une répartition régulière des observations à l'intérieur de chaque classe.



Les deux observations positionnées « symétriquement » par rapport au centre xi ont pour valeur moyenne précisément xi.

* Le risque d'erreur liée à l'hypothèse sera d'autant plus faible que (ni) est grand et que l'amplitude de la classe (ai) est réduite.

4-1-8-Méthode de calcul simplifié (changement simultanés d'origine xo **et d'échelle a)**

La variable initiale peut s'écrire en réalité $xi = \dfrac{xi - 0}{1}$

La nouvelle variable auxiliaire est une variable « centrée réduite » qui s'écrit $zi = \dfrac{x\,i - x0}{a}$

xo se substitue à l'origine 0 (la variable est « centrée » sur xo).

A (amplitude de classe) se substitue à l'échelle unitaire 1 (la variable est « réduite » car exprimée en unités de a).

Le schéma de la méthode simplifié reste le même. Seules les deux relations sont modifiées par l'utilisation d'une nouvelle échelle a :

$$zi = \frac{x\,i - x0}{a} \quad \text{ou encore} \quad x = azi + xo \qquad (7)$$

$$\bar{z} = \frac{\bar{x}\,i}{a} - \frac{x0}{a} \quad \text{ou encore} \quad \bar{x} = a\bar{z} + xo \qquad (8)$$

Lorsque l'amplitude de classe est inégale, on prend l'intervalle PGCD (plus grand commun dénominateur). Si (ai) croît de la façon suivante : ai = 100 à 150, a2 = 150 à 300, a3 = 300 à 500, a4 = 500 à 1 000, l'intervalle a sera 50 (PGCD à tous les intervalles).

Remarque : Les grandeurs A,R.. peuvent s'écrire A = A/1, B = B/1… $\sum_i ni$

Les grandeurs A, B, peuvent s'écrire A = A/1, B = B/1…Le rapport B/A signifie que l'on « réduit » B par le choix d'une échelle A supérieur à 1 ; autrement dit, on exprime B en unité de A.

Exemple : A = 2, B = 8, B/A = 4 (B exprimé en unité de « 2 » est égale à 4).

4-1-9- Démonstrations de relations impliquant $\bar{x}$

$$\sum_i^n (xi - \bar{x}) = 0$$

$\sum$ étant un opérateur linéaire permet d'écrire :

$$\sum_i^n (xi - \bar{x}) = \sum_i^n xi - \sum_i^n \bar{x}\, i \text{ (i variant de 1 à n).}$$

de la formule (1), on tire : $\sum_i^n xi = n\bar{x}$ et nous savons déjà que $\sum \bar{x} = n\bar{x}$

Finalement $\sum_i^n (xi - \bar{x}) = n\bar{x} - n\bar{x} = 0$ (ce qu'il fallait démontrer).

$\bar{z} = \bar{x} - x0$ et $\sum (xi - x0) = \sum xi - \sum x0 = n\bar{x} - n\, x0$

Comme par définition zi = xi – xo et que $z = \dfrac{\sum_i^n zi}{n}$, on obtient :

$$\sum_i^n zi = n\bar{z} = n \qquad \bar{x} - nx0 = n(\bar{x} - \bar{x}0)$$

En divisant membre à membre par n : $\bar{z} = \bar{x} - x0$ c'est ce qu'il fallait démontrer.

Des démonstrations s'appuyant sur les mêmes éléments permettraient de vérifier ces deux relations, pour des distributions de fréquences avec ou sans classe.

Ainsi pour la seconde relation $\bar{z} = \dfrac{\bar{x}}{a} - \dfrac{x0}{a}$

$$\sum_{i}^{n} z_i n_i = \sum_{i}^{n} n_i \frac{(x_i - x_0)}{a} = \frac{1}{a} (\sum n_i x_i - \sum n_i x_0)$$

En divisant membre à membre par $\sum_{i}^{n} n_i$, on obtient :

$$\frac{\sum_{i}^{n} z_i n_i}{\sum_{i}^{n} n_i} = \frac{1}{a} \left(\frac{\sum_{i}^{n} z_i n_i}{\sum_{i}^{n} n_i} \right) - x_0$$

$\bar{z} = \frac{1}{a} (\bar{x} - x_0)$ ce qu'il fallait démontrer.

Cette relation est utilisée ultérieurement.

4-10- Calcul de la moyenne arithmétique (série n° 3)

Tableau de calcul direct

xi	ni	xi	ni xi
175 à 200	4	187,5	750,0
200 à 225	16	212,5	3400,0
225 à 250	36	237,5	8550,0
250 à 275	22	262,5	5775,0
275 à 300	14	287,5	4025,0
300 à 325	8	312,5	2500,0
∑	100		25000,00

Tableau de calcul auxiliaire

ni	zi	ni zi
4	-2	-8
16	-1	-16
36	0	0
22	1	+22
14	2	+28
8	3	+24
100		+74 -24 +50

1) Calcul direct

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i}^{n} nixi}{\sum_{i}^{n} ni} = \frac{25000.00}{100}$$ revenu moyen par ménage est de 25000).

2) Calcul simplifié

x0 = 237,5 a = 25 zi = (xi -xo)/a

Pour la 1ère ligne :

zi = (xi -xo)/a = (1 87,5 – 237,5)/ 25 = - 50/25 = -2

pour la deuxième ligne :
z2 = (x2 – x0)/ a = (212,5 – 237,5)/ 25 = -1

Moyenne auxiliaire :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i}^{n} nizi}{\sum_{i}^{n} ni} = + 50/100 = + 0,5.$$

Moyenne auxiliaire :

$\bar{x} = a\bar{z} + xo = 25 (+ 0,5) + 237,5 = 12,5 + 237,5 = 250$

(vérification de la valeur de la moyenne arithmétique).

La méthode simplifiée peut encore paraître peu intéressante. Cependant, il faut noter que le montant de la sommation a été considérablement réduit (+ 25 contre 12 500. La simplification portera définitivement « des fruits » lors des calculs ultérieurs (écart-type, moments…)

4-11- La moyenne arithmétique et l'effet de structure : 'SHIFT AND SHARE' :

L'analyse « shift and Share » est une application de la moyenne arithmétique, utilisée pour comparer plusieurs moyennes pondérées quand les coefficients de pondérations sont très différents les uns des autres. L'approche qui consiste à comparer deux phénomènes à partir de la comparaison des moyennes peut induire en erreur de jugement. Cette erreur de jugement viendrait du fait que l'effet de structure dû à la différence de pondération n'est pas pris en compte. C'est pour éviter ce genre d'erreur de jugement qu'il faut se référer à l'analyse de « Shift and Share ». Par l'application de cette analyse à tout phénomène, on peut mettre en évidence l'effet de structure qui relève des pondérations et l'effet résiduel qui reste un effet intrinsèque au phénomène. Cette mise en évidence est réalisée par la variation séparée des pondérations (ni/n) et des valeurs de (xi).

La décomposition des salaires moyens par sexe va nous permettre de mettre en évidence cet effet de structure :

- xi : salaires, Cadres S : cadres supérieurs,
- ni : effectifs O.S : Ouvriers spécialisés

	Hommes		Femmes		Ensembles	
Emplois	xi	ni	xi	ni	xi	ni
Cadre S	9000	50	7000	30	8250	80
Techniciens	6000	60	5000	40	5600	100
O.S	4000	90	3000	80	3529,4	170
Total	5850	200	4333,3	150	5200	350

D'après les données du tableau ci-dessus, la différence de salaire entre les hommes et les femmes est de 5850-4333,3 = 1516,7 dhs. Quel serait le salaire moyen fictif des hommes pour les trois catégories d'emplois s'il y avait autant de femmes que d'hommes pour chaque emploi.

Si W est le salaire moyen ($\bar{w}$) fictif des hommes = $\frac{1}{n(H+f)} \sum_{i=1}^{3} \bar{w}$ Ih.ni (H +F)

Emplois	Ni (H + F)	$\bar{W}$ iH	$\frac{ni}{n}$ (H + F). $\bar{W}$ iH
Cadre S	80	9000	2057,14
Techniciens	100	6000	1714,29
O.S	170	4000	1942,86
Total	350	5850	5714,29

On obtient donc un effet de structure sur l'ensemble de 137,71 dhs, c'est-à-dire que le salaire moyen fictif est de 5714,29 au lieu de 5850.

Ainsi, la différence de salaire moyen entre les hommes et les femmes qui est de 1516,67 dhs est composé :

- d'un effet de structure de 135,71 dhs dû au fait qu'il y a plus d'hommes que de femmes.
- D'un effet résiduel de 1380,96 dhs (1516,67 – 135,71) dû au surpaiement des hommes par rapport aux femmes.

4-12- Généralisation de la notion de moyenne

$\bar{x}$ est en réalité la plus simple des moyennes de grandeur qui concernent également : la moyenne quadratique (notée Q), la moyenne harmonique (notée H) et la moyenne géométrique (notée G).

La moyenne est une fonction symétrique notée f(X) de tous les termes de la série suivante : f(x1), f(x2), f(x 3) … f (xn)

avec

$$f(X) = \frac{1}{n}[\, f(x1) + f(x2) + f(x3) \ldots + f(xn)] = \frac{1}{n} \sum f\,(xi)$$

Selon la nature du terme, on obtient des séries et donc des moyennes différente

f(xi)	type de série	type de moyenne	f(x)
Xi	xi, x2, … xn	arithmétique	$\bar{x}$
xi^2	$(x1)^2, (x2)^2, \dots (xn)^2$	quadratique	Q
$(xi)^{-1}$	$(x1)^{-1}, (x2)^{-1}, \dots (xn)^{-1}$	harmonique	H
log xi	log x1, log x2 …, log xn	géométrique	G
Formules correspondantes des différentes moyennes (pour les séries sans effectifs)			
$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum xi,$ $\quad Q^2 = \frac{1}{n} \sum (xi)^2,$ $H^{-1} = \frac{1}{n} \sum (xi)^{-1}$ ou $1/H = \frac{1}{n} \sum (1/xi).$ $\log G = \frac{1}{n} \sum (\log xi)$ ou $G = n\sqrt{x1, x2, x3, xn}$			

I) La moyenne Géométrique :

Cette moyenne est utilisée pour le calcul de taux d'accroissement moyens, ou de moyennes de coefficients multiplicateurs. C'est la racine $n^{ième}$ du produit des n valeurs positives du caractère x. son calcul suppose que toutes les valeurs de la variable sont positives étant donné l'utilisation des racines carrés et des logarithmes dans ce calcul.

On calcule la **moyenne géométrique simple** selon les équations équivalentes suivantes :

$$\text{Log } G = \frac{1}{n} \sum (\log xi) \text{ ou } G = \sqrt[n]{x1, x2, x3, xn}$$

ou $G = \left(\prod_{1}^{n} xi \right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\prod xi}$

et la **moyenne géométrique pondérée**

pour la laquelle à chaque valeur de la variable correspondent plusieurs observations. Avec des effectifs ni, les formules de la moyenne géométrique pondérée est :

$G = \sqrt{x1^{n1} \cdot x2^{n2} \ldots\ldots\ldots xk^{nk}}$ ou $G = [\prod (xi^{ni})]^{\frac{1}{n}}$

Si on utilise les fréquences fi avec i qui varie de 1 à k, on aura :

$G = x1^{fi}\ x2^{f2} \ldots\ldots\ldots xk^{fk}$ ou $G = [\prod_{i=1}^{k} (xi^{fi})]$

Car $= \sqrt[n]{xi^{ni}} = [xi^{ni}]^{\frac{1}{n}} = xi^{\left(\frac{ni}{n}\right)} = xi^{fi}$

Par les logarithmes

$$\text{Log } G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} ni \log xi$$

Exemple :

Le chiffre d'affaire augment de 5% les deux premières années, de 9% les quatre années suivantes et de 12% la dernière année. Quelle est l'augmentation moyenne annuelle ? La réponse à cette question exige l'utilisation de la moyenne géométrique. Le nombre d'années est sept (7).

$G = \sqrt[7]{(1,05)^2 \cdot (1,09)^4 \cdot (1,12)} = 1,083$

Ce qui donne à un taux de croissance de 8,3%

II) La moyenne Harmonique (H) :

C'est la valeur de la variable pour laquelle son inverse est la moyenne arithmétique de l'inverse des valeurs de la variable. Elle sert à calculer les moyennes de pourcentages et de rapports, notamment dans celui des durées moyennes et des vitesses moyennes. Son expression est présentée avec son inverse

$$\frac{1}{H}$$

Moyenne Harmonique Simple

$$H^{-1} = \frac{1}{n}\sum (xi)^{-1} \quad \text{ou} \quad 1/H = \frac{1}{n}\sum (1/xi).$$

Moyenne Harmonique pondérée

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n}\left(\frac{n1}{x1} + \frac{n2}{x2} + \ldots\ldots + \frac{nk}{xk}\right) \quad \text{ou} \quad H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{k} \frac{ni}{xi}} \quad \text{avec} \quad \sum_{i}^{k} ni = n$$

Exemple:

Sur un trajet la vitesse est de 60 Km à l'heure l'aller et 30 Km à l'heure le retour. Quelle est la vitesse moyenne ?

La réponse juste n'est pas la moyenne arithmétique $\bar{x} = 90/2 = 45$ Km/h, mais c'est la moyenne des rapports « une heure pour x kilomètres »

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{60}\right) = \frac{1}{40} \quad \text{ce qui donne H = 40 Km/h}$$

Dans les cas des distances inégales, les pondérations sont nécessaires :

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n}\left(\frac{n1}{30} + \frac{n2}{60}\right)$$

III) La moyenne Quadratique (Q)

C'est la racine carrée de la moyenne arithmétique des carrés des observations de la série. Son utilisation est utile dans le cas des moyennes d'écarts à une valeur centrale ; l'élévation au carré permettant de ne pas avoir à manipuler des écarts négatifs.

Moyenne quadratique Simple :

$$Q^2 = \frac{1}{n} \sum (xi)^2$$

$$Q = \left(\frac{\sum_{i=1} xi^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}}$$ C'est une racine carrée

Moyenne quadratique pondérée :

$$Q^2 = \frac{1}{N} [\, x_1^2 n_1 + x_2^2 n_2 + \ldots\ldots x^2{}_k n_k \,] \text{ avec } n = \sum_{i=1} ni$$

$$Q = \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} nixi^2}{n} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Application :

Soit une série de 4 termes ayant pour valeur : 1 – 3 – 3 – 9.

Tableau de calcul

Xi	$(xi)^2$	$\frac{1}{xi} = (xi)^{-1}$
1	1	1/1 = 9/9
3	9	1/3 = 3/9
3	9	1/3 = 3/9
9	81	1/9 = 1/9
16	100	16/9

Valeurs des moyennes (n = 4)

$\bar{x} = 16/4 = 4$

Q = 100/4 = 25 et Q = 5

1/H = 16/9/4 = 4/9 et H = 9/4

$G = (1.3.3.9)^{1/4} = (3^4)^{1/4} = 3$

La moyenne générale peut également s'écrire :

$$f(X) = \frac{1}{n} \sum_{i}^{n} (xi)^{\alpha},$$

Selon l'exposant α , on obtient des types de moyennes différentes (α se lit « alpha »)

Valeurs de α	0- < 0 < 1 < 2
Type de moyenne	H < G < x < Q
Application	2,25 < 3 < 4 < 5

Formules des différentes moyennes pour les séries avec effectifs

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i}^{n} nixi}{\sum_{i}^{n} ni}, \quad Q^2 = \frac{\sum_{i}^{n} ni(xi)^2}{\sum_{i}^{n} ni}, \quad H = \frac{\sum_{i}^{n} ni}{\sum_{i}^{n} \left(\frac{ni}{xi}\right)}$$

$$G = [(x1)^{ni}. (x2)^{n2} \ldots\ldots\ldots (xk)^{nk}]^{1/\sum_{i}^{n} ni}$$

$$\text{Log } G = \frac{1}{\sum ni} [n1(\log x1) + n2 (\log x2) + nk (\log xk)]$$

(il existe k lignes au tableau de calcul et logarithme est décimal : base 10).

On retrouve les propriétés des logarithmes qui transforment les produits en sommes et les exposants en coefficients. La moyenne quadratique est utilisée dans le calcul pratique de l'écart-type.