Module : Mathématiques financières

Chapitre : Equivalence de capitaux à intérêts composés

I- Définition :

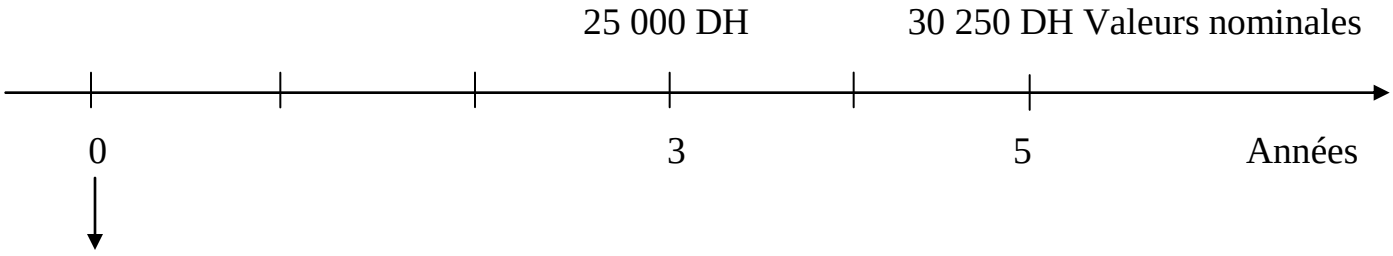
Nous avons défini et étudié l'équivalence des effets (ou des capitaux) à intérêts simples.

Le même raisonnement nous conduit à l'équivalence à intérêts composés, s'appliquant en principe à des opérations à moyen en long termes.

1- Deux capitaux de valeurs nominales et d'échéances différences sont équivalents, à intérêts composés, à une date déterminée (date d'équivalence) si, escomptés à intérêts composés au même taux et dans les mêmes conditions, ils ont, à cette date, même valeur actuelle.

Exemple :

Soit un capital de 25 000 DH payable dans 3 ans et un capital de 30 250 DH payable dans 5 ans. Taux d'escompte : 10 %.



Valeur actuelle à la date d'équivalence :

Premier capital : $25\,000 \times (1{,}1)^{-3} = 25\,000 \times 0{,}751\,314\,8 = 18\,782{,}87$ DH.

Deuxième capital : $30\,250 \times (1{,}1)^{-5} = 30\,250 \times 0{,}620\,921\,32 = 18\,782{,}87$ DH.

A l'époque 0, ces deux capitaux, au taux annuel de 10 %, ont même valeur actuelle : ils sont donc équivalents.

Si nous changeons la date d'équivalence, les valeurs actuelles restent égales (à condition de ne pas changer de taux).

Epoque 1 : $25\,000 \times (1,1)^{-2} = 25\,000 \times 0,826\,446\,28 = 20\,661,15$ DH

$30\,250 \times (1,1)^{-4} = 30\,250 \times 0,683\,013\,45 = 20\,661,15$ DH.

Ce n'est pas étonnant puisque déplaçant la date d'équivalence de n périodes, nous multiplions les deux membres de l'égalité par $(1,1)^n$ ou $(1,1)^{-n}$.

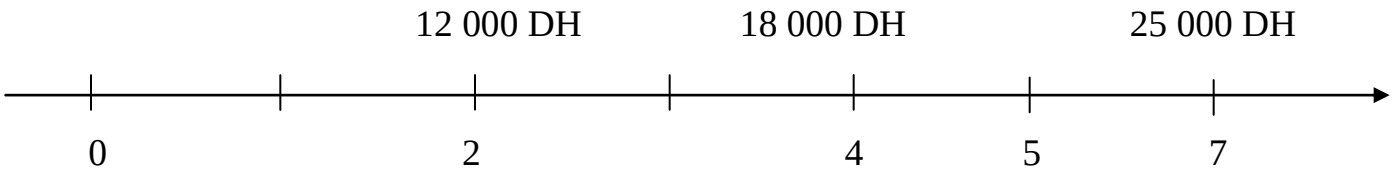
A intérêts composés, si l'équivalence à un trax donné a lieu à une date déterminée, elle a lieu, au même taux, à n'importe quelle autre date.

2- De même : un capital est équivalent, à intérêts composés, à une date déterminée, à un ensemble de plusieurs autres capitaux si la valeur actuelle de ce capital est égale à la somme des valeurs actuelles des autres capitaux (les actualisations écart faites au même taux et dans les mêmes conditions).

Exemple :

Montrons qu'un capital de 50 075 DH payable dans 4 ans est équivalent, à intérêts composés, à trois capitaux :

- 12 000 DH payables dans deux ans ;
- 18 000 DH payables dans cinq ans ;
- 25 000 DH payables dans sept ans. Taux : 9 %.



Valeurs actuelles à l'époque 0 (choisie comme date d'équivalence) :

$12\,000 \times (1,09)^{-2} = 12\,000 \times 0,8416\,68 = 10\,100,16$ DH

$18\,000 \times (1,09)^{-5} = 18\,000 \times 0,649\,931 = 11\,698,76$ DH

$25\,000 \times (1,09)^{-7} = 25\,000 \times 0,547\,034 = 13\,675,85$ DH

35 474,77 DH

$50\,075 \times (1,09)^{-4} = 50\,075 \times 0,708\,425\,21 = 35\,474,39$ DH

Il y a bien équivalence.

Remarques :

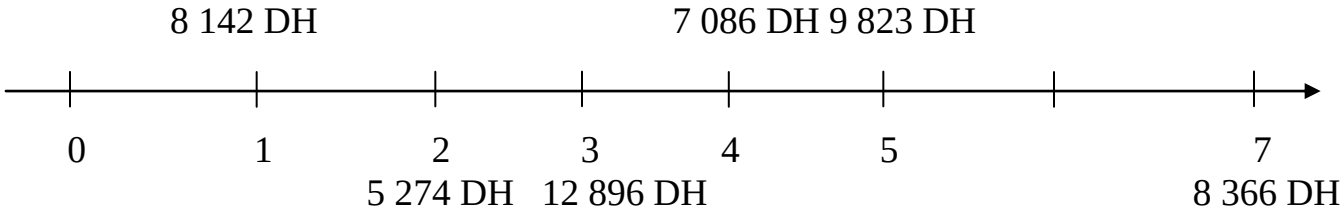
- Nous pouvions nous placer à n'importe quelle autre époque pour établir cette équivalence. Ainsi, vérifiez qu'à l'époque 4 : $12\,000 \times (1,09)^2 + 18\,000 \times (1,09)^{-1} + 25\,000 \times (1,09)^{-3} = 50\,075$ DH.
- L'équivalence signifie que, retenant un taux de 9 %, il revient au même de payer successivement 12 000 DH dans deux ans, 18 000 DH dans cinq ans et 25 000 DH dans sept ans ou bien de payer en une seule fois 50 075 DH dans quatre ans. Nous devions immédiatement l'importance de cette notion d'équivalence à intérêts composés dans les opérations financières à moyen et à long terme.

3- Par extension : deux groupes de capitaux sont équivalents à intérêts composés, à une date déterminée, si la somme des valeurs actuelles des capitaux du premier groupe est égale à la somme des valeurs actuelles des capitaux du deuxième groupe (actualisations au même taux et dans les mêmes conditions).

Exemple :

Premier groupe	Deuxième groupe
• 8 142 DH payables dans 1 an	• 5 274 DH payables dans deux ans
• 7 086 DH payables dans 5 an	• 12 896 DH payables dans 3 ans
• 9 823 DH payables dans 5 an	• 8 366 DH payables dans 7 ans

Taux 10 %



Valeurs actuelles à l'époque 0 :

$8\,142 \times (1,1)^{-1} =$	7 401,82	$5\,274 \times (1,1)^{-2} =$	4 358,68
$7\,086 \times (1,1)^{-4} =$	4 839,83	$12\,896 \times (1,1)^{-3} =$	9 688,96
$9\,823 \times (1,1)^{-5} =$	6 099,31	$8\,366 \times (1,1)^{-7} =$	4 293,08
	18 340,96		18 340,72

Les deux groupes de capitaux sont équivalents à intérêts composés au taux annuel de 10 %.

II- Intérêt pratique de l'équivalence à intérêts composés :

La notion d'équivalence à intérêts composés constitue la base même de tous les calculs d'actualisation.

Elle permet, entre autres, de remplacer un ou plusieurs capitaux par un ou plusieurs capitaux équivalents. Il suffit que créancier et débiteur se mettent d'accord sur le taux : dès lors, aucune des deux parties ne se sentira lésée.