OFPPT

مكتب التكوين المهني وإنعاش الشغل

Office de la Formation Professionnelle
et de la Promotion du Travail

Module : Mathématiques financières

Chapitre : Les intérêts composés

I- Principe :

Pour les opérations financières à long terme (se prolongeant sur plusieurs années), on peut considérer, à la fin de chaque année, l'intérêt simple produit par un capital prêté ou placé, comme un nouveau capital productif d'intérêts.

Si l'on applique ce principe à un capital de 80 000 DH placé au taux annuel de 8 % pendant 3 ans, ce capital devient :

Années	Capital placé au début de l'année	Intérêt produit pendant l'année	Capital obtenu à la fin de l'année
1	80 000	80 000 x 0,08 = 6 400	86 400
2	86 400	86 400 x 0,08 = 6 912	93 312
3	93 312	93 312 x 0,08 = 7 464,96	100 776,96
		20 776,96	

A intérêts simples, le capital obtenu, à la fin de la troisième année, ne serait que de :

80 000 + (80 000 x 0,08 x 3) = **99 200 DH**.

Définition :

Un capital est dit placé à intérêts composés lorsque, à la fin de chaque période que dure le placement, l'intérêt simple produit est ajouté au capital pour former un nouveau capital qui, à son tour, produira intérêt pendant la période suivante et ainsi de suite.

La capitalisation des intérêts à la fin de chaque période est la caractéristique fondamentale du prêt à intérêts composés. Généralement la capitalisation est annuelle : mais les parties peuvent convenir, dans un contrat, d'une capitalisation semestrielle, trimestrielle, voir mensuelle.

Exemple :

Que devient un capital de 100 000 DH placé à intérêts composés pendant trois semestres au taux semestriel de 4 % ; capitalisation semestrielle.

Semestres	Capital placé au début de semestre	Intérêt semestriel	Capital obtenu à la fin du semestre
1	100 000	100 000 x 0,04 = 4 000	104 000
2	104 000	104 000 x 0,04 = 4 160	108 160
3	108 160	108 160 x 0,04 = 4 326,40	112 486,40
		12 486,40	

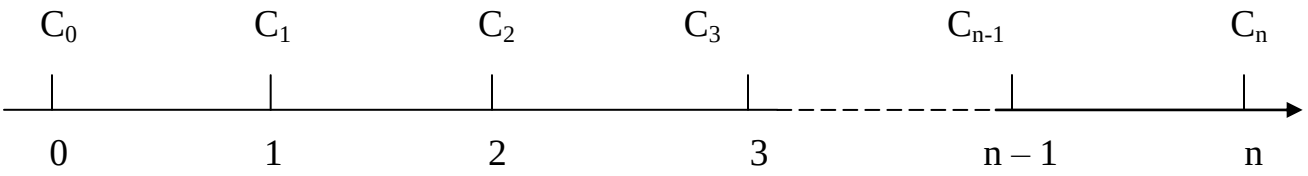
A intérêts simples, le capital obtenu ne serait que de :

100 000 + (100 000 x 0,04 x 3) = **112 000 DH**.

II – Valeur acquise à intérêts composés : forme générale

1- Le temps de placement est un nombre entier de périodes :

Désignons par C_0 le capital initial, i le taux d'intérêt par dirham correspondant à la période de capitalisation, n le nombre de périodes de placement, C_1 la valeur acquise à la fin de la première période, C_2 la valeur acquise à la fin de la deuxième période, … C_{n-1} la valeur acquise à la fin de la $(n - 1)^e$ période, C_n la valeur acquise à la fin de la n^e période.



Présentons un tableau de détermination des valeurs acquises successive, identique à celui des exemples précédents.

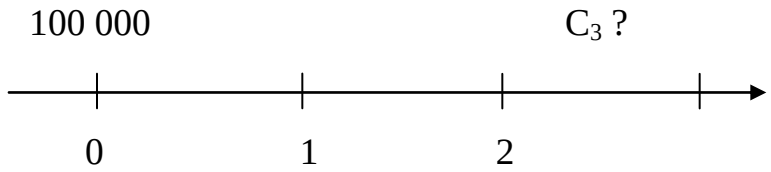
Périodes	Capital placé	Intérêt produit	Valeur acquise
1	C_0	$C_0\, i$	$C_1 = C_0 + C_0\, i = C_0(1 + i)$
2	$C_0(1 + i)$	$C_0(1 + i)\, i$	$C_2 = C_0(1 + i) + C_0(1 + i)\, i = C_0(1 + i)^2$
3	$C_0(1 + i)^2$	$C_0(1 + i)^2\, i$	$C_3 = C_0(1 + i)^2 + C_0(1 + i)^2\, i = C_0(1 + i)^3$
…	…	…	…
n – 1	$C_0(1 + i)^{n-2}$	$C_0(1 + i)^{n-2}\, i$	$C_{n-1} = C_0(1 + i)^{n-1}$
n	$C_0(1 + i)^{n-1}$	$C_0(1 + i)^{n-1}\, i$	$C_n = C_0(1 + i)^n$

Nous obtenons la formule générale de la valeur acquise à Intérêts composés :

$$C_n = C_0(1 + i)^n$$

Exemple 1 :

Reprenons l'exemple d'un capital de 100 000 DH placé pendant trois semestres au taux semestriel de 4 %.



$C_3 = 100\,000 \times (1 + 0{,}04)^3$
$C_3 = 100\,000 \times (1{,}124\,864$
$C_3 = 112\,486{,}40$ DH

L'ensemble des intérêts s'élève à : 112 486,40 – 100 000 = 12 486,40 DH.

Exemple 2 :

Soit un capital de 126 000 DH placé au taux annuel de 7 % (capitalisation annuelle).

Les valeurs acquises à la fin de la première, demande, deuxième, troisième, … huitième et vingt cinquième années sont les suivantes :

C_1 $= 126\,000 \times (1 + 0{,}07) = 126\,000 \times 1{,}07 = 134\,820$ DH
C_2 $= 126\,000 \times (1 + 0{,}07)^2 = 126\,000 \times 1{,}144\,9 = 144\,257{,}40$ DH
C_3 $= 126\,000 \times (1 + 0{,}07)^3 = 126\,000 \times 1{,}225\,043 = 154\,355{,}41$ DH
…
C_8 $= 126\,000 \times (1 + 0{,}07)^8 = 126\,000 \times 1{,}718\,186 = 216\,491{,}43$ DH
…
C_{25} $= 126\,000 \times (1 + 0{,}07)^{25} = 126\,000 \times 5{,}427\,433 = 633\,856{,}55$ DH

Remarque :

1- Il faut retenir un nombre suffisant de décimales dans le calcul de $(1 + i)^n$ (utiliser de préférence une calculatrice).

2- La formule de la valeur acquise à intérêts composés nécessite l'utilisation d'un taux par dirham *i* et d'un nombre de périodes n qui concordent avec la période de capitalisation convenue.

- capitalisation annuelle : taux annuel et nombre d'années de placement ;
- capitalisation semestrielle : taux semestriel et nombre de semestres de placement ;
- capitalisation trimestrielle : taux trimestriel et nombre de trimestres de placement ;
- capitalisation mensuelle : taux mensuel et nombre de mois de placement.

3- Le montant cumulé des intérêts 1 est obtenu par différence entre la valeur acquise et le capital initial :

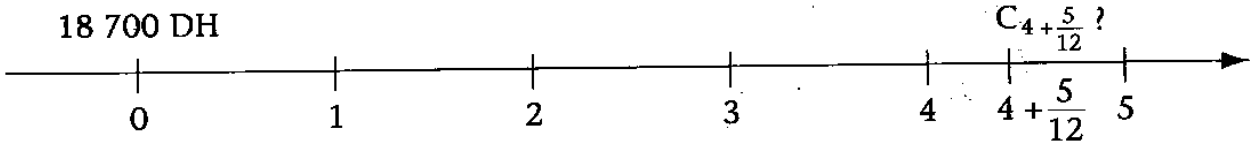
$$1 = C_n - C_0.$$

2- Le temps de placement n'est pas un nombre entire de periods:

Exemple :

Une somme de 18 700 DH est placée à intérêts composés au taux annuels de 6 % (capitalisation annuelle).

Quelle est la valeur acquise au bout de 4 ans et 5 mois ?



Deux solutions sont possibles : l'une rationnelle, l'autre commerciale.

Solution rationnelle :

On considère que la valeur acquise au bout de 4 ans reste placée à intérêts simples pendant 5 mois :

$$C_{4+\frac{5}{12}} = C_0(1+i)^4 + [C_0(1+i)^4] \times i \times \frac{5}{12}$$

Valeur acquise au bout de 4 ans et 5 mois	=	Valeur acquise au bout de 4 ans	+	Intérêts simples produits pendant les cinq dernier mois

Valeur acquise au bout de 4 ans : 18 700 x $(1,06)^4$ = 18 700 x 1,262 476 96 = 23 608,32 DH.

Intérêts simples rapportés en 5 mois : $23\,608{,}32 \times 0{,}06 \times \frac{5}{12} = 590{,}21$ DH.

Valeur acquise au bout de 4 ans et 5 mois : 23 608,32 + 590,21 = **24 198,53 DH.**

Remarque : $C_{4+\frac{5}{12}} = C_0(1+i)^4 (1+i)^{\frac{5}{12}}$

Solution commerciale :

Dans la pratique, la solution rationnelle est peu employée. On lui préfère une solution approchée, fondée sur l'utilisation directe de la formule générale $C_n - C_0(1+i)^n$ où n devient obligatoirement un nombre fractionnaire.

$$C_{4+\frac{5}{12}} = C_0(1+i)^{4+\frac{5}{12}}$$

Valeur acquise après 4 ans et 5 mois de placement à intérêts composés (solution commerciale) :

$$18\,700 \times (1,06)^{4+\frac{5}{12}} = 18\,700 \times (1,06)^{\frac{53}{12}} = 18\,700 \times 1,293\,503\,391 = 24\,188,51 \text{ DH.}$$

Notons que dans ce cas une seule formule est à retenir : $C_n = C_0(1 + i)_n$, n étant un nombre fractionnaire. On peut aussi, si l'on utilise la table financière, poser :

$$18\,700 \times (1{,}06)^{4+\frac{5}{12}} = 18\,700 \times (1{,}06)^4 \times (1{,}06)^{\frac{5}{12}} = 18\,700 \times 1{,}262\,477 \times 1{,}024\,68 = 24\,188{,}61 \text{ DH.}$$

Remarques : Les résultats de la solution commerciale sont toujours légèrement inférieurs à ceux de la solution rationnelle (24 188,51 DH au lieu de 24 198,53 DH).

L'exposant est une fraction de la période de capitalisation concordant avec le taux par dirham utilisé $\left[\frac{53}{12}\right.$ d'année, c'est-à-dire 53 mois ou 4 ans et 5 mois$\left.\right]$.

Exemple :

On place 32 000 DH à intérêts composés au taux trimestriel de 2,25 % pendant 1 an et 8 mois (capitalisation trimestrielle).

Puisque la capitalisation est trimestrielle, il faut que le temps de placement soit exprimé en trimestres.

1 an et 8 mois = 20 mois = 6 trimestres + $\frac{2}{3}$ trimestre.

$C_6 = 32\,000 \text{ x } (1{,}022\,5)^6 = 32\,000 \text{ x } 1{,}142\,825\,44 = 36\,570{,}41$ DH.

Solution rationnelle :

$C^{6+\frac{2}{3}} = 36\,570{,}41 + 36\,570{,}41 \text{ x } 0{,}022\,5 \text{ x } \frac{2}{3} = 36\,570{,}41 + 548{,}56 =$ **37 118,97 DH**.

Solution commerciale :

$C^{6+\frac{2}{3}} = C_0 (1 + t)^{6+\frac{2}{3}} = 32\,000 \text{ x } (1{,}022\,5)^{\frac{20}{3}} = 32\,000 \text{ x } 1{,}159\,904\,17 =$ **37 116,93 DH**.

$= 32\,000 \text{ x } (1{,}022\,5)^6 \text{ x } (1{,}022\,5)^{\frac{20}{3}} = 32\,000 \text{ x } 1{,}142\,825 \text{ x } 1{,}014\,94$

$= 37\,116{,}76$ DH.

III – Taux proportionnels et taux équivalents :

1- Taux proportionnels :

Deux taux correspondant à des périodes différentes sont dits proportionnels lorsque leur rapport est égal au rapport de leurs périodes respectives.

Exemple :

9 % par an et 2,25 % par trimestre.

En effet : $\frac{9}{2,25} = \frac{12}{3}$ (périodes en mois).

Nous savons qu'en intérêts simples deux taux proportionnels produisent sur un même capital les mêmes intérêts au bout du même temps de placement, c'est-à-dire lui donnant la même valeur acquise.

Exemple :

1 000 DH placés à intérêts simples rapportent en un an :

Taux	Intérêt produit	Valeur acquise
9 % l'an	1 000 x 0,09 = 90	1 090
4,50 % par semestre	1 000 x 0,045 x 2 = 90	1 090
0,75 % par mois	1 000 x 0,007 5 x 12 = 90	1 090

Il n'en va pas de même pour un placement à intérêts composés :

Taux	Intérêt produit
9 % l'an	$1\,000 \times (1 + 0,09)^1 = 1\,090$
4,50 % par semestre	$1\,000 \times (1 + 0,045)^2 = 1\,090,03$
0,75 % par mois	$1\,000 \times (1 + 0,007\,5)^{12} = 1\,093,81$

Ce n'est pas étonnant puisqu'il y a capitalisation pendant la période de placement.

2- Taux équivalents :

A intérêts composés, nous pouvons dès lors déterminer à quel taux semestriel x (par dirham), il faut faire le placement précédent pour obtenir au bout d'un an (soit deux semestres) par capitalisation semestrielle la même valeur acquise que par capitalisation annuelle.

$1\,000 \times (1 + \chi)^2 = 1\,000 \times (1 + 0,09)^1$

$(1 + \chi)^2 = (1,09)^1$

$(1 + \chi) = (1,09)^{\frac{1}{2}}$

$\chi = (1,09)^{\frac{1}{2}} - 1 = 1,044\,03 - 1 = 0,044\,03$

Ce taux correspondant à des périodes de capitalisation différentes sont dits équivalents lorsque, à intérêts composés, ils donnent, au bout du même temps de placement, à un même capital, la même valeur acquise.

Exemple :

Taux équivalents au taux annuel de 9 %.

Taux équivalent	Relation	Valeur
semestriel	$(1 + i_s) = (1 + 0{,}09)^{\frac{1}{2}}$	$i_s = 0{,}044\ 03$ soit 4,403 %
trimestriel	$(1 + i_t) = (1 + 0{,}09)^{\frac{1}{4}}$	$i_t = 0{,}021\ 778$ soit 2,18 %
mensuel	$(1 + i_m) = (1 + 0{,}09)^{\frac{1}{12}}$	$i_m = 0{,}007\ 207$ soit 0,72 %
bisannuel	$(1 + x) = (1 + 0{,}09)^{\frac{2}{1}}$	$x = 0{,}188\ 1$ soit 18,81 %

Si i_p est le taux (par dirham) correspondant à une période de durée p et i_q le taux (par dirham) correspondant à une période de durée q exprimée dans la même unité que p, i_p et i_q sont équivalents lorsque : $(1 + i_p) = (1 + i_q)^{\frac{p}{q}}$.

Exemple 2 :

Le taux mensuel (période d'une durée d'un mois), équivalent au taux semestriel (période d'une durée de six mois), vérifie la relation :

$$(1 + i_m) = (1 + i_s)^{\frac{1}{6}}$$

$$(1 + 0{,}007\ 207) = (1 + 0{,}044\ 03)^{\frac{1}{6}}.$$

Remarques :

La période de référence est l'année.

Le taux équivalent relatif à une période d'une durée inférieure à l'année (semestre, trimestre, mois, jour) est plus faible que le taux proportionnel correspondant. Le taux équivalent relatif à une période d'une durée supérieure à l'année (capitalisation bisannuelle, trisannuelle) est plus élevé que le taux proportionnel correspondant.

- La notion de taux d'intérêt équivalent est utilisée dans les calculs d'actualisation, notamment pour déterminer le taux réel d'un emprunt, les échéances pouvant être différentes : semestrielles, trimestrielles ou mensuelles.
- La notion de taux équivalent est également utilisée quand on étend la formule générale de la valeur acquise à intérêts composés au cas où n est fractionnaire.

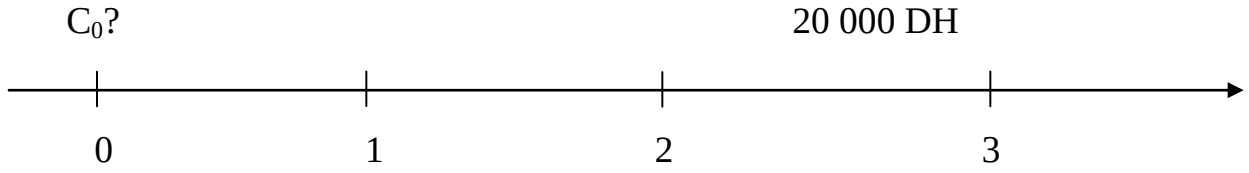
VI – Valeur actuelle à intérêts composés

Nous savons déterminer la valeur acquise par un capital placé à intérêts composés au bout d'un certain temps de placement (nombre entier ou non de périodes). Cette opération est une **capitalisation**.

A l'inverse, nous pouvons nous demander quelle somme il faut placer à intérêts composés pour obtenir, après un certain temps de placement, un capital déterminé.

Exemple :

Quelle somme faut-il placer à intérêts composés au taux annuel de 7,5 % pour obtenir dans trois ans, versement initial et intérêts réunis, un capital de 20 000 DH ?



$C_0 \times (1{,}075)^3 = 20\,000$ $\qquad$ $C_0 = \dfrac{20\,000}{(1{,}075)^3}$

soit en appliquant les règles relatives aux exposants négatifs :

$C_0 = 20\,000 \times (1{,}075)^{-3} = 20\,000 \times 0{,}804\,96 = 16\,099{,}20$ DH.

16 099,20 DH est la valeur actuelle, au tau annuel de 7,5 %, d'un capital de 20 000 DH payable dans trois ans.

Cette opération, inverse de la capitalisation, est une **actualisation**.

- **Formule d'actualisation :**

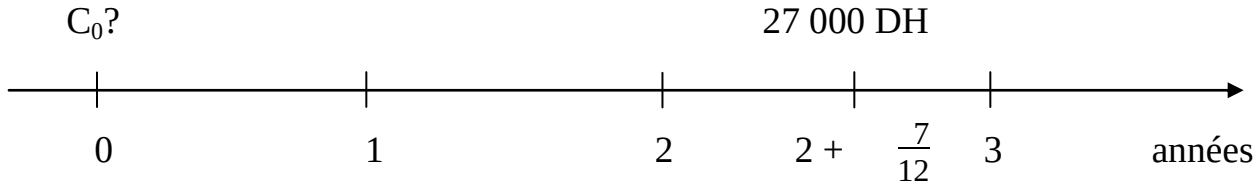


Nous savons que $C_n = C_0(1 + i)^n$ d'où $C_0 = C_n (1 + i)^{-n}$.

C_0 est a valeur actuelle, à l'époque du placement, de la valeur acquise à l'époque n. Le temps de placement est un nombre entier ou fractionnaire de périodes.

Exemple :

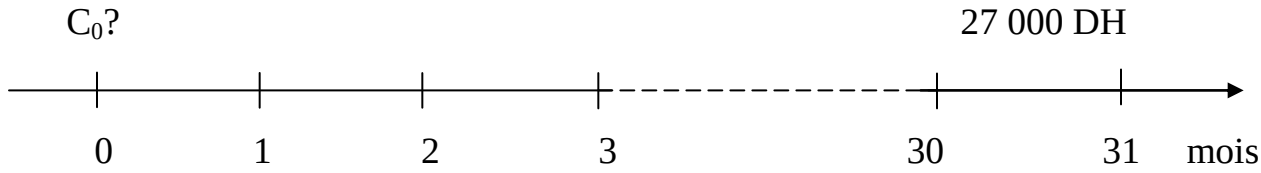
Quelle somme faut-il placer à intérêts composés au taux annuel de 5,60 % pour obtenir un capital de 27 000 DH payable dans 2 ans et 7 mois ?



$$C_0 = 27\,000 \times (1{,}056)^{-\left(2+\frac{7}{12}\right)}$$
$$= 27\,000 \times (1{,}056)^{\left(-\frac{31}{12}\right)}$$
$$= 27\,000 \times 0{,}868\,696\,77 = \mathbf{23\,454{,}81\ DH}.$$

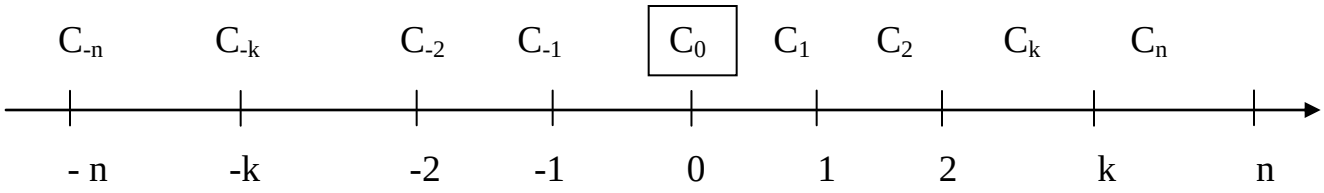
Dans ce calcul, nous avons pris l'année comme période de référence. Nous aurions pu considérer le mois comme période de référence, mais, dans ce cas, il faut utiliser non pas le taux annuel de 5,60 % mais le taux mensuel équivalent au taux annuel

de 5,60 %, c'est-à-dire $(1{,}056)^{\frac{1}{12}} - 1 = 1{,}004\,551 - 1 = 0{,}004\,551$.



C_0 = 27 000 x (1 + taux mensuel équivalent par dirham)$^{-31}$
= 27 000 x $(1 + 0{,}004\,551)^{-31}$
= 27 000 x $(1{,}004\,551)^{-31}$ = 27 000 x 0,868 696 77 = **23 454,81**.

V- Evaluation d'un capital à une époque quelconque



Sin à l'époque 0, on place à intérêts composés un capital C_0, il est facile dès lors d'évaluer sa valeur acquise après 1, 2, … K, …, n périodes de placement, mais également *sa valeur actuelle* 1, 2, …k, …, n périodes avant l'époque 0.

$C_{-n} = C_0 (1 + i)^{-n}$
$C_{-k} = C_0 (1 + i)^{-k}$
$C_{-2} = C_0 (1 + i)^{-2}$
$C_{-1} = C_0 (1 + i)^{-1}$

Sommes nécessaires pour obtenir C_0

$C_0 = C_0(1 + i)^0$ puisque $(1 + i)^0 = 1$

Sommes acquises par C_0

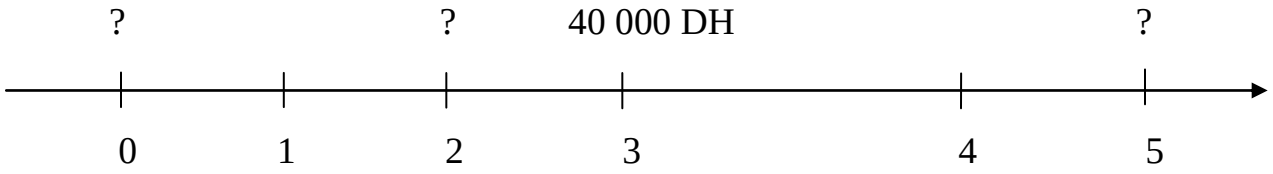
$C_1 = C_0 (1 + i)^1$
$C_2 = C_0 (1 + i)^2$
$C_k = C_0 (1 + i)^k$
$C_n = C_0 (1 + i)^n$

Il est donc extrêmement facile d'évaluer à une date quelconque un capital dont on connaît la valeur à une autre date.

Exemple :

Un débiteur doit s'acquitter d'une dette de 40 000 DH dans trois ans.

- Quelle somme doit-il placer aujourd'hui pour disposer de cette somme, compte tenu d'intérêts composés calculés à 4,5 % l'an (capitalisation annuelle), le jour de l'échéance ?
- S'il préfère n'effectuer ce placement qu'un an avant l'échéance, quelle somme doit-il placer dans les mêmes conditions ?
- Le créancier lui accordant un délai de paiement de deux ans, combien paiera-t-il s'il règle effectivement sa dette dans cinq ans (le taux convenu entre les parties étant de 4,5 % l'an) ?



- Montant du placement trois ans avant l'échéance :

$40\,000 \times (1{,}045)^{-3} = 40\,000 \times 0{,}872966 =$ **35 051,86 DH.**

- Montant du placement un an avant l'échéance :

$40\,000 \times (1{,}045)^{-1} = 40\,000 \times 0{,}9569377 =$ **38 277,51 DH.**

Remarques :

On peut facilement trouver ce résultat à partir du résultat précédent ; il suffit de constater sur le schéma linéaire que deux périodes séparent ces évaluations.

$35\,051{,}86 \times (1{,}045)^2 = 35\,051{,}86 \times 1{,}092\,025 = 38\,277{,}51$ DH.

- Puisque le taux n'a pas varié, le débiteur réglera dans 5 ans :
  $40\,000 \times (1{,}045)^2 = 40\,000 \times 1{,}092\,025 = 43\,681$ DH.
  solution que l'on peut déterminer également (cf. le schéma linéaire).
- En partant de la période 0 : $35\,051{,}86 \times (1{,}045)^5 = 35\,051{,}86 \times 1{,}246\,181\,9 = 43\,681$ DH
- En partant de la période 2 : $38\,277{,}51 \times (1{,}045)^3 = 38\,277{,}51 \times 1{,}141\,166\,1 = 43\,681$ DH.

Cet exemple montre à l'évidence qu'il convient de situer sur un schéma linéaire le capital en regard de la date qui lui est associée et qu'en utilisant la formule générale des intérêts composés, il est facile d'évaluer ce capital à toute autre date (postérieure ou antérieure).