OFPPT

مكتب التكوين المهني وإنعاش الشغل

Office de la Formation Professionnelle
et de la Promotion du Travail

Module : Mathématiques financières

Chapitre : Equivalence à intérêts composés

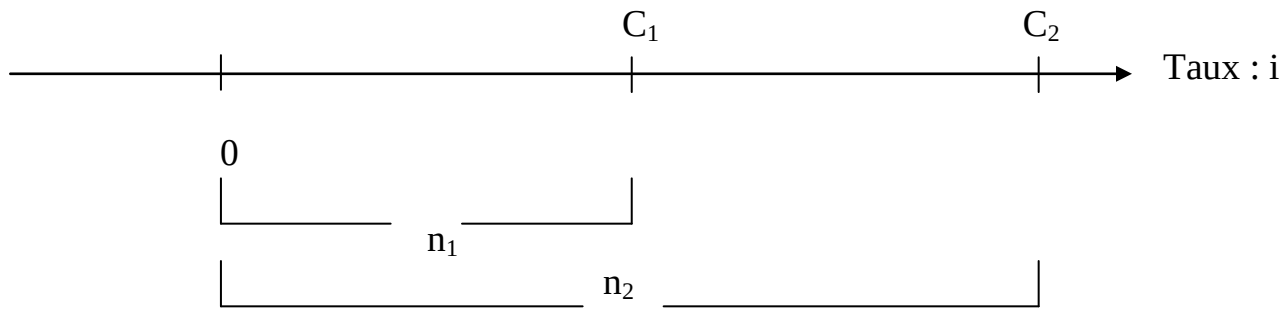
L'équivalence à intérêts composés est appliquée à des opérations à moyen et long terme. On retrouve ici le même principe que l'équivalence de capitaux à intérêt simples.

I- Equivalence de deux capitaux :

Définition :

Deux capitaux (ou effets) sont équivalents à intérêts composés à une date donnée, si escomptés à intérêts composés et au même taux, ils ont à cette date la même valeur actuelle.

Si C_1 et C_2 sont deux effets payables dans n_1 et $n_2$périodes et escomptés à un taux i par période.



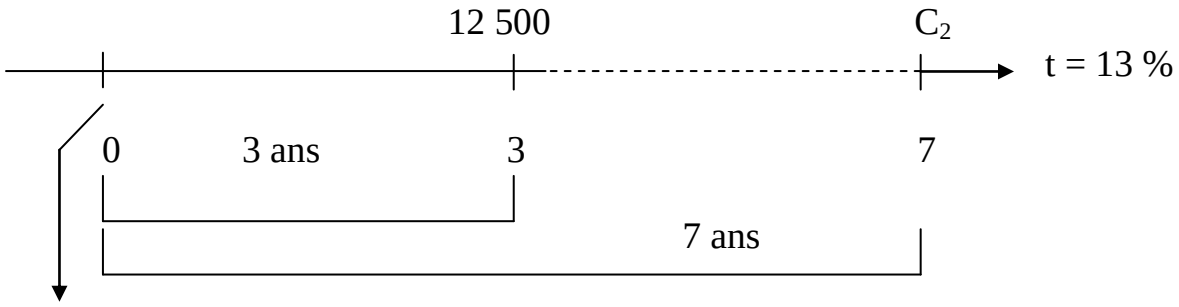
C_1 et C_2 sont équivalents si et seulement si :

$$C_1 (1+i)^{-n1} = C_2 (1+i)^{-n2}$$

Exemple :

Un effet de 12 500 dh échéant dans 3 ans doit être remplacé par un autre échéant dans 7 ans. Calculer la valeur nominale C de l'effet de remplacement. Taux d'escompte 13%.

Le problème se traduit par le schéma suivant :



Date d'équivalence

A la date d'équivalence, l'égalité s'écrit :

$$12\,500\,(1{,}13)^{-3} = C\,(1{,}13)^{-7}$$

Ce qui donne $C = 12\,500\,(1{,}13)^{4}$

$C = 20\,380{,}92$ dh

A l'époque 0, les deux capitaux 12 500 dh et 20 380,92 dh ont la même valeur actuelle, à un taux d'escompte de 13%.

On peut vérifier de la manière suivante :

$12\,500\,(1{,}13)^{-3} = 8\,663{,}13$ dh

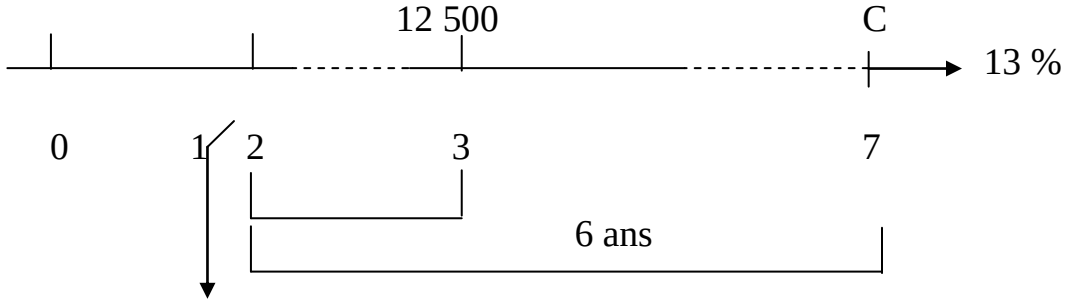
$20\,380{,}92\,(1{,}13)^{-7} = 8\,663{,}13$ dh.

Remarque :

D'une manière générale, en matières d'intérêts composés, si deux capitaux sont équivalents à une date, ils sont équivalents à toute autre date. L'équivalence de capitaux à intérêts composés est indépendante de la date d'équivalence. Il convient donc de choisir la date la plus favorable aux calculs.

Exemple :

Reprenons l'exemple précédent et modifiant la date d'équivalence.



Date d'équivalence

A l'époque 1 : l'équivalence s'écrit :

$$12\,500\,(1{,}13)^{-2} = C\,(1{,}13)^{-6}$$

Ce qui donne $C = 12\,500\,(1{,}13)^{-4}$

$C = 20\,380{,}92$ dh

Il suffit simplement de multiplier les deux termes de l'égalité par :

- $(1 + i)^n$ si l'on se place n années après la première date d'équivalence.
- $(1 + i)^{-n}$ si l'on se place n années avant la première date d'équivalence.

II- Equivalence de plusieurs capitaux :

Définition :

Un capital est équivalent, à intérêts composés et à une date donnée, à un groupe de capitaux, si au même taux d'escompte, la valeur actuelle de ce capital est égale à la somme des valeurs actuelles de l'ensemble du groupe de capitaux.

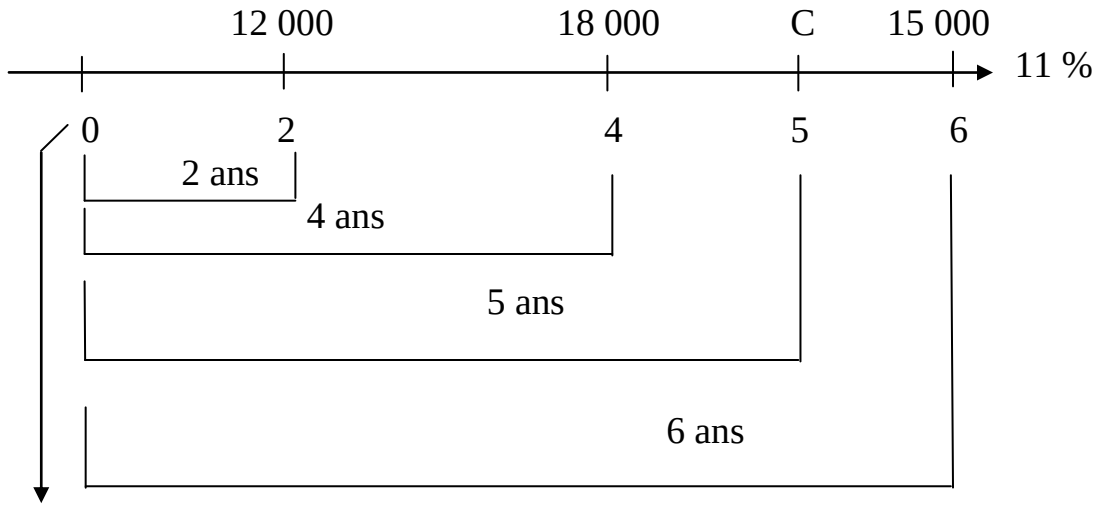
Exemple :

On souhaite remplacer les trois effets suivants :

12 000 dh dans 2 ans ;
15 000 dh dans 6 ans ;
18 000 dh dans 4 ans ;

Par un effet unique de nominal C payable dans 5 ans. Taux 11%.
Calculer la valeur nominale de ce capital.

A l'époque 0, l'égalité de l'équivalence est :



Date d'équivalence

A l'époque 0 : l'égalité d'équivalence s'écrit :

$$C\,(1{,}11)^{-5} = 12\,000\,(1{,}11)^{-2} + 18\,000\,(1{,}11)^{-4} + 15\,000\,(1{,}11)^{-6}$$

$$C\,(1{,}11)^{-5} = 29\,616{,}24$$

$$C = 29\,616{,}24\,(1{,}11)^{5}$$

$$C = 49\,905{,}05$$

Remarque :

1) L'équivalence peut être vérifiée à n'importe quelle autre date.
2) L'exemple signifie que, à un taux de 11 %, payer 49 905,09 dh dans 5 ans est identique à des versements successifs de :
   12 000 dh dans 2 ans ;
   18 000 dh dans 4 ans ;
   15 000 dh dans 6 ans ;
3) On peut vérifier de la même manière l'équivalence entre deux groupes d'effets.

III- Ech2ance commune et échéance moyenne :

Il s'agit du problème de remplacement d'un groupe de capitaux (ou d'effets) par un seul capital.

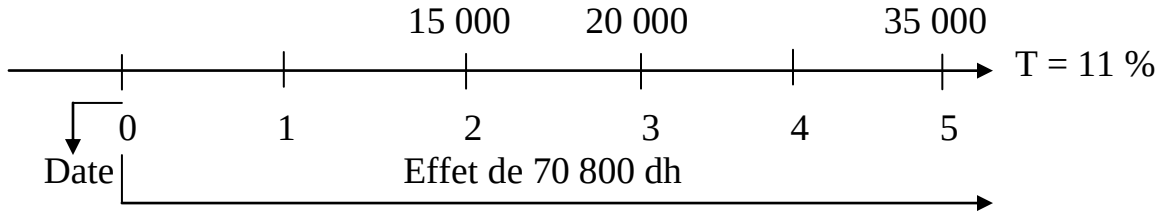
* si la valeur nominale du capital unique est différente de la somme des valeurs nominales des capitaux remplacés, il s'agit de l'échéance commune ou de l'échéance unique.

* si la valeur du capital unique est égale à la somme des valeurs nominales des capitaux remplacés, il s'agit de l'échéance moyenne.

Exemple :

Un créancier accepte que son débiteur remplacer trois dettes
   12 000 dh dans 2 ans ;
   20 000 dh dans 3 ans ;
   35 000 dh dans 5 ans,
Par un versement unique de 70 800 dh, taux annuel d'escompte de 10,5%.
Déterminer l'échéance de ce paiement.

Il s'agit d'une échéance commune puisque
70 800 ♯ 15 000 + 20 000 + 35 000



d'équivalence Echéance commune x ?

Si x est l'échéance du paiement unique, par rapport à l'époque 0, alors :
$70\,800\,(1{,}105)^{-x} = 15\,000\,(1{,}105)^{-2} + 20\,000\,(1{,}05)^{-3} + 30\,000\,(1{,}05)^{-5}$
$70\,800\,(1{,}105)^{-x} = 12\,284{,}76 + 14823{,}24 + 21\,244{,}99$
$(1{,}105)^{-x} = 48\,352{,}99/70\,800 = 0{,}682952$

Par les logarithmes :

$-x \log (1,05) = \log 0,682952$
$x = -\log 0,682\,952/\log (1,105)$
$x = 3,819\,214$ années

Le paiement unique de 70 800 dh sera effectué dans 3 ans 9 mois et 25 jours.

Cas de l'échéance moyenne :

Il suffit de remplacer les trois effets par un seul dont la valeur nominale est égale à la somme des valeurs nominales des effets remplacés :

Valeur nominale du capital unique : $= 15\,000 + 20\,000 + 35\,000$
$= 70\,000$ dh.

Exemple :

Reprenons toujours 0 commune date d'équivalence
Si x est l'échéance moyenne alors :

$70\,000\,(1,05)^{-x} = 48\,352,99$
$(1,05)^{-x} = 48\,352,99/70\,000$
$-x \log (1,105) = \log 0,690757$
$x = -\log 0,690\,757/\log (1,105)$
$x = 3,705403$ années.

La date de l'échéance moyenne est dans 3 ans 8 mois et 14 jours.

Remarque :

1) L'échéance moyenne est indépendante de la date d'équivalence.
2) La recherche de l'échéance moyenne peut s'effectuer par une interpolation linéaire.

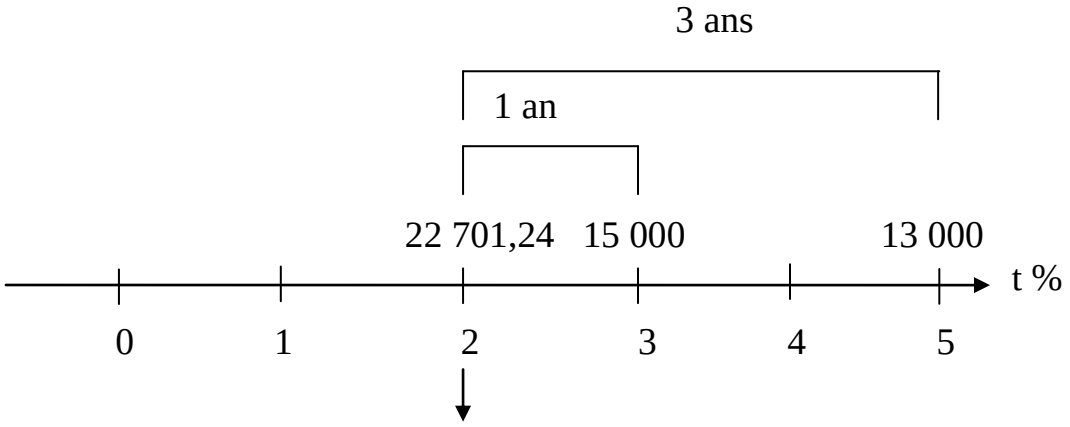
VI- Unité pratique de la notion d'équivalence :

L'équivalence à intérêts composés est à la base de tous les calculs d'actualisation. Elle permet de remplacer un ou plusieurs effets par un ou plusieurs autres effets équivalents et de déterminer les dates d'échéance des effets de remplacement. Partant de l'égalité entre les valeurs actuelles de deux effets, on peut calculer.

- la valeur nominale d'un capital ;
- la date d'échéance d'un capital ;
- le taux d'actualisation.

Exemple : Calcul du taux d'actualisation

Un débiteur remplace deux effets : 15 000 dh dans 3 ans et 13 000 dh dans 5 ans par un seul effet de 22 701,24 dh payable dans 2 ans. Quel est le taux retenu pour cet arrangement ?



Date d'équivalence

Choisissons l'année 2 comme date d'équivalence. Si (i) est le taux d'actualisation, alors l'égalité de l'équivalence s'écrit :

$$22\,701{,}24 = 15\,000\,(1+i)^{-1} + 13\,000\,(1+i)^{-3}$$

Pour résoudre cette équation, procédons par des approximations successives :

Essai à 10% → $15\,000\,(1+10)^{-1} + 13\,000\,(1+10)^{-3} = 23\,403{,}46$

Essai à 11% → $15\,000\,(1{,}11)^{-1} + 13\,000\,(1{,}11)^{-3} = 23\,019{,}00$

Essai à 12% → $15\,000\,(1{,}12)^{-1} + 13\,000\,(1{,}12)^{-3} = 22\,646{,}00$

Le taux est compris entre 11 % et 12 %.

Par une interpolation linéaire :

$$\begin{array}{ll} 0{,}11 & \longrightarrow\ 23\,019{,}00 \\ i & \longrightarrow\ 22\,701{,}24 \\ 0{,}12 & \longrightarrow\ 22\,646{,}00 \end{array}$$

$$\frac{i - 0{,}11}{0{,}12 - 0{,}11} = \frac{22\,701{,}24 - 23\,019{,}00}{22\,646{,}00 - 23\,019{,}00}$$

$i = 0{,}11 + (0{,}01)\ \underline{317{,}76}$ ce qui donne $i = 0{,}118519$
$\quad\quad\quad